IL CALCOLO DIFFERENZIALE (IV)

Criterio di differenziabilità. Funzioni a valori vettoriali.

C'è un fondamentale risultato che permette di dedurre la differenziabilità di f dalla continuità delle sue derivate parziali.

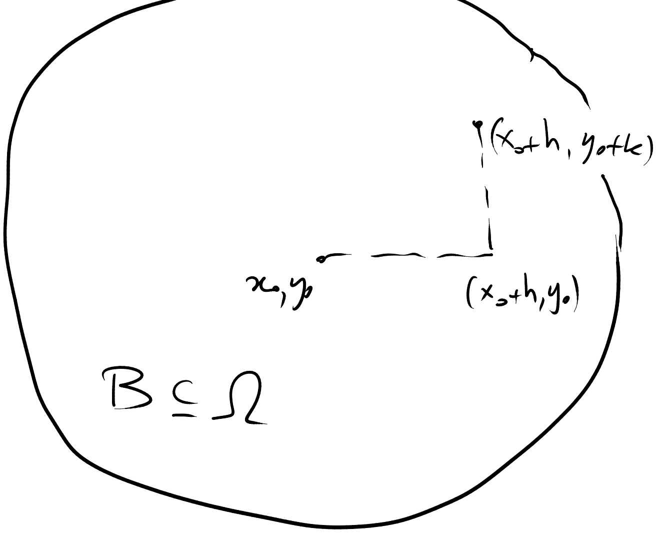
DEFINIZIONE: Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Si dirà che $f\in C^1(\Omega)$ se tutte le derivate parziali f_{x_i} esistono e sono continue in Ω.

Vale il seguente:

TEOREMA (del differenziale, o del differenziale totale): Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora f è differenziabile in (ogni punto di) Ω.

DIM. $(n=2)$

Sia B un intorno di (x_0,y_0) contenuto in Ω. Si ha



$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,y_0)=$$

$$=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)$$

Le funzioni

$$s \longrightarrow f(s, y_0) \quad e \quad t \longrightarrow f(x_0+h, t)$$

sono continue e derivabili in ogni punto degli intervalli $[x_0, x_0+h]$ e $[y_0, y_0+k]$, rispettivamente, e dunque, dal teorema di Lagrange applicato su tali intervalli, segue

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = k f_y(x_0+h, \xi) + h f_x(\eta, y_0)$$

per opportuni ξ, compreso fra y_0 e y_0+k, ed η, compreso fra x_0 e x_0+h.

Sostituendo nel limite del differenziale, segue che

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{h,k\to 0} \frac{\left| h\left[f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0,y_0)\right] + k\left[f_y(x_0+h, \xi) - f_y(x_0,y_0)\right]\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq$$

$$\leq \lim_{h,k\to 0} \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \left|f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0,y_0)\right| + \lim_{h,k\to 0} \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \left|f_y(x_0+h,\xi) - f_y(x_0,y_0)\right|$$

Ora, $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ sono minori o uguali ad 1 mentre, quando $h,k \to 0$, $\eta \in [x_0, x_0+h]$ tende a x_0, e $\xi \in [y_0, y_0+k]$ tende a y_0 (per il teorema del confronto) da cui, essendo f_x ed f_y continue in (x_0, y_0) segue infine che

$$|f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0,y_0)| \xrightarrow{h\to 0} 0 \quad e \quad |f_y(x_0+h, \xi) - f_y(x_0,y_0)| \xrightarrow{k\to 0} 0$$

In definitiva, l'ultimo membro delle precedenti disuguaglianze, somma di prodotti di funzioni limitate per funzioni infinitesime, è infinitesimo, da cui la differenziabilità.

$\blacksquare$

Se le dimensioni fossero più di due, basta incrementare una variabile alla volta, applicare il teorema di Lagrange, e stimare come prima tutti i termini.

Il teorema è molto utile quando è facile verificare che le derivate parziali di f sono continue. Ad esempio $f(x,y) = \sin(xy)$ è ovunque differenziabile perché le due derivate parziali $y\cos(xy)$ e $x\cos(xy)$ sono continue in quanto prodotti di composizioni di funzioni continue.

La teoria finora svolta ha riguardato le funzioni scalari di variabile vettoriale. Il prossimo passo sarà di estendere il concetto di differenziale al caso generale di funzioni da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$: abbiamo già discusso la situazione per le funzioni scalari, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n>1$, mentre resta da studiare e calcolare il differenziale di funzioni vettoriali.

IL DIFFERENZIALE DI FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Inizieremo con le "curve parametriche", e cioè con le funzioni di una sola variabile scalare t, a valori in $\mathbb{R}^n$, $n>1$. La definizione di differenziale che adopereremo non richiederà ulteriori fatiche: è quella che abbiamo già introdotto nel caso delle funzioni scalari.

Dunque $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ sarà detta DIFFERENZIABILE in x_0 se $\exists\ A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ lineare tale che

$$\lim_{w \to 0} \frac{|\gamma(x_0+w) - \gamma(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

Osserviamo che mentre la norma che appare al denominatore è un semplice valore assoluto in $\mathbb{R}$, quella al numeratore è la norma nel codominio, e quindi in $\mathbb{R}^n$. Osserviamo inoltre che ogni funzione lineare $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, come è noto dall'Algebra Lineare, è del tipo $A(w) = a\,w$, ove w è scalare ed $a = A(1)$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$ (basta osservare che $A(w) = A(w \cdot 1) = w\,A(1)$). Per determinare le componenti di $a \in \mathbb{R}^n$ a partire dalla funzione γ osserviamo che, scritto in forma scalare, il limite del differenziale diventa

$$\lim_{w\to 0} \frac{1}{|w|} \left\| \begin{pmatrix} \gamma_1(x_0+w)\\ \gamma_2(x_0+w)\\ \vdots \\ \gamma_n(x_0+w)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\gamma_1(x_0)\\ \vdots\\ \gamma_n(x_0)\end{pmatrix} - w\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^n}$$

e portando dentro la norma in $\mathbb{R}^n$ $\frac{1}{w}$, e ricordando che un vettore tende a zero se e solo se tendono a zero tutte le sue componenti scalari, ne segue che il limite precedente è zero se e solo se

$$\lim_{w\to 0} \frac{\gamma_i(x_0+w) - \gamma_i(x_0) - w a_i}{w} = 0 \quad \forall i = 1..n$$

Ciò accade se e solo se γ_i è derivabile in x_0 e

$$a_i = \dot{\gamma}_i(x_0)$$

Dunque, per le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$, il differenziale si rappresenta mediante la formula

$$d\gamma(x_0, w) = \dot{\gamma}(x_0)\, w$$

L'utilizzo della lettera γ è tipico per le curve parametriche, ma occorre notare che la formula del differenziale è "ancora" del tipo già incontrato più volte $f'(x_0)w$, con l'importante differenza che, stavolta, w è scalare, $f'(x_0)$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$, ed il prodotto indicato è un prodotto scalare fra vettori, ancora diverso dal prodotto di numeri $f'(x_0)w$ che ricorre se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o dal prodotto scalare di vettori $f(x_0)w$, che si adopera quando $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Non è ancora finita: come si rappresenta (e così come si calcola) il differenziale di funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, quando $n, m > 1$? Com'è il gradiente in tal caso?

Si dirà che $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è differenziabile in x_0 se esiste $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare tale che

$$\lim_{w \to 0} \frac{\left| f(x_0+w) - f(x_0) - A(w) \right|_{\mathbb{R}^m}}{|w|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

Stavolta, la norma a denominatore è in $\mathbb{R}^n$ (dominio) e quella a numeratore è in $\mathbb{R}^m$ (codominio).

Portando dentro la norma al numeratore lo scalare $\frac{1}{|w|_{\mathbb{R}^n}}$ (stavolta non si può eliminare la $|\ |_{\mathbb{R}^n}$ come in precedenza, perché w è un vettore), e ricordando di nuovo l'equivalenza fra la convergenza dei vettori e quella delle loro componenti, ne segue che la differenziabilità equivale a

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f_i(x_0+w) - f_i(x_0) - A_i(w)|}{|w|} = 0 \quad \forall i = 1 \ldots m$$

ove $A_i(w)$ è l'i-esima componente scalare di $A(w)$.

Dunque, ognuna delle m componenti scalari $f_i(x)$ del vettore $f(x)$ deve essere differenziabile con differenziale $A_i(w)$, da cui

$$A_i(w) = \nabla f_i(x_0) w = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} w_j$$

e infine

$$df(x_0, w) = A(w) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} (f_1)_{x_j}(x_0) w_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} (f_m)_{x_j}(x_0) w_j \end{pmatrix}$$

Posto allora

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & (f_1)_{x_2} & \cdots & (f_1)_{x_n} \\ \vdots & & & \\ (f_m)_{x_1} & (f_m)_{x_2} & \cdots & (f_m)_{x_n} \end{pmatrix} (x_0)$$

ne segue subito che $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e che

$$df(x_0, w) = f'(x_0) w$$

Ciò non sorprende più, ma stavolta $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $w \in \mathbb{R}^n$, ed il prodotto indicato è quello della matrice $f'(x_0)$ per il vettore w.

La matrice $f'(x_0)$, più su definita, si chiama anche <u>**derivata**</u> o <u>**gradiente**</u> (nessuna novità) ma, più frequentemente nelle scienze sperimentali, anche <u>**MATRICE JACOBIANA di f**</u>, in onore del matematico Carl Gustav Jacob JACOBI.

In conclusione,

$$\boxed{df(x_0, w) = f'(x_0)\, w}$$

sempre e comunque: si tratta solo di capire che oggetti siano $f'(x_0)$ e w (due scalari, uno scalare e l'altro vettore, due vettori, o una matrice ed un vettore), e di moltiplicarli nel modo appropriato.

Sempre a proposito di fisica ed affini, per le curve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ il vettore $\dot{\gamma}(t_0)$ è la velocità nel punto $\gamma(t_0)$ della traiettoria, ed è legato alla tangente alla traiettoria come si vedrà tra breve.

Poche note conclusive.

La teoria generale del concetto di derivata e differenziale è piuttosto recente (secolo scorso). Talvolta la derivata direzionale è detta anche **derivata** (ovvero differenziale, nome che sconsiglio di impiegare) **di GATEAUX**, mentre il differenziale è detto **differenziale di FRECHÉT**. Direi che usare derivata (per la derivata di Gateaux) e differenziale (per il differenziale di Frechét) sia sufficiente.

Un punto più delicato riguarda le formule di rappresentazione del differenziale. Negli spazi di dimensione infinita non sempre esistono teoremi che descrivono la struttura delle applicazioni lineari come prodotti OPPORTUNI dello incremento "per qualcosa". Quando ciò accade, il differenziale si potrà rappresentare come un "prodotto" dell'incremento per un "qualcosa", che verrà allora definito come il gradiente (o la derivata, o la jacobiana) della funzione nel punto. I teoremi di struttura delle applicazioni lineari diventano uno strumento cruciale, e sono purtroppo ben lungi dall'essere semplici (o banali) osservazioni, come in $\mathbb{R}^n$.