IL CALCOLO DIFFERENZIALE (III)

Il differenziale ed il gradiente.

Le due proprietà appena provate non sono le uniche interessanti del differenziale. In questa sezione verrà dimostrata una delle proprietà fondamentali del differenziale, che lo lega alle derivate parziali e ne permette il calcolo, anche in pratica, con la sola fatica di calcolare n derivate: una cosa per tutti!

TEOREMA Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in \Omega$. Allora f possiede derivata in ogni direzione $v \neq 0$, ed inoltre

$$f_v(x_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0, v) \equiv A(v)$$

DIM. Si ha

$$\left| \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - A(v) \right| = \frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-tA(v)|}{|t|} =$$

$$\begin{pmatrix} \text{A lineare} \\ \text{ed} \\ \text{omogeneità} \\ \text{della norma} \end{pmatrix} = |v| \frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|tv|}$$

Ne segue che

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}-A(v)\right| = |v|\lim_{t\to 0}\frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|tv|}$$

La funzione nell'ultimo limite è composta da $t \to tv = w$ e da $\dfrac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|}$, che non è definita per $w=0$. Ne segue che si può cambiare variabile e, dunque, il limite della funzione composta è uguale a quello della funzione $\frac{1}{|w|}|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|$, che è 0 per l'ipotesi di differenziabilità. Ne segue

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}-A(v)\right| = 0$$

e cioè

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = A(v)$$

$\blacksquare$

Dunque, ogni funzione differenziabile ha tutte le derivate direzionali, che possono essere calcolate semplicemente calcolando il differenziale sulla direzione v. Quest'ultimo risultato ha una conseguenza immediata d'importanza fondamentale. Si ha, infatti:

$$A(v) = A\left(\sum_1^n v_i e_i\right) = \sum_1^n v_i A(e_i)$$

e, per il teorema precedente, $A(e_i) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

Ne segue subito la

FORMULA (DI RAPPRESENTAZIONE) DEL DIFFERENZIALE: Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se f è differenziabile in $x_0 \in \Omega$, allora

$$df(x_0, w) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, w_i$$

Se si definisce il vettore, detto **GRADIENTE** di f in x_0, ponendo

$$\nabla f(x_0) = \left(f_{x_1}(x_0),\ f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0)\right)$$

si può scrivere la formula in forma vettoriale

$$\boxed{df(x_0, w) = \nabla f(x_0)\, w}$$

ove il prodotto fra ∇f e w è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Il modo tradizionale di scrivere il differenziale è leggermente diverso. Si considerino le funzioni

$$\pi_i(w) = w_i$$

che proiettano il vettore w su e_i, e cioè che associano a w la sua i-esima coordinata. Poiché ogni Π_i è lineare, dal teorema sui differenziali di funzioni lineari segue

$$d\Pi_i(x_0, v) = w_i$$

e dunque

$$df(x_0, v) = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, d\Pi_i(x_0, w)$$

Anche così siamo lontani dalle consuetudini antiche: ciò che si fa correntemente, in tutte le scienze applicate, è di scrivere dx_i invece di $d\Pi_i(x_0, w)$ e di eliminare del tutto x_0 e w, ottenendo l'effetto di rendere oscura la natura del differenziale, ma anche di ottenere la formula

$$df = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

molto simile a quella $dy = \frac{dy}{dx} dx$, che si usa per cambiare variabile negli integrali.

Alcune note di colore. Il gradiente non è solo un modo per scrivere più alla svelta la formula del differenziale. Proviene dalla teoria dei campi vettoriali, e viene denotato anche con $\operatorname{grad} f$ (niente sorprese!), ma anche con $f'(x_0)$; in questa forma, la formula del differenziale diventa $df(x_0, w) = f'(x_0)w$, formalmente identica a quella delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. In realtà, nel nostro caso $f'(x_0)$ e w sono in $\mathbb{R}^n$ e il prodotto è un prodotto scalare, e non un prodotto fra numeri. La nota conclusione al teorema di Fermat è ora più chiara.

Il potente teorema precedente sull'esistenza delle derivate direzionali fornisce anche un'utile formula per calcolarle:

Se f è differenziabile, allora

$$\boxed{f_v(x_0) = df(x_0, v) = \nabla f(x_0) v}$$

Dunque, basta calcolare le n derivate parziali per poter calcolare subito, eseguendo un prodotto scalare, qualunque derivata direzionale.

<u>ATTENZIONE</u>: la formula è falsa se f non è differenziabile. Ad esempio, basta considerare

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché f è costante sugli assi, f ha derivate parziali nulla in $(0,0)$, ma non è derivabile in nessun'altra direzione, come è già stato provato nella sezione riguardante il teorema di Fermat.

Una importante conseguenza dei teoremi precedenti riguarda la possibilità di studiare la differenziabilità di una funzione usando direttamente la definizione: infatti, ogni applicazione lineare $A(w)$ per cui il limite si annulla, verifica di necessità $A(w) = \nabla f(x_0) w$. Ne segue il

COROLLARIO (di unicità) **Il differenziale, se esiste, è unico e verifica** $df(x_0, v) = \nabla f(x_0) v$

L'utilità è meglio illustrata da un esempio.

ESEMPIO: Studiare la differenziabilità in $(0,0)$ di $f(x,y) = |xy|$

Passo 1 C'è il gradiente?

Le derivate parziali non possono essere calcolate usando la derivazione delle funzioni composte, perché $|t|$ non è derivabile per $t=0$ e in $(0,0)$ in effetti $t = xy$ vale 0.

Nulla osta, però, di usare la definizione

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

e così

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

Dunque ci sono tutte le derivate parziali in $(0,0)$, e ne segue che il "candidato differenziale" non può essere che

$$\nabla f(0,0)(h,k) = 0\cdot h + 0\cdot k = 0$$

Passo 2 $\nabla f(x_0)w$ è realmente il differenziale?

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{\left|\overbrace{f(h,k)}^{f((0,0)+(h,k)) = f(x_0+w)} - f(0,0) - \overbrace{\nabla f(0,0)(h,k)}^{A\binom{h}{k} = A(w)}\right|}{|(h,k)|} =$$

$$= \lim_{h,k\to 0} \frac{\big|\,|hk| - 0 - 0\,\big|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h,k\to 0} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\dfrac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ è 1-omogenea e continua su tutta la sfera unitaria (compatta) e dunque il limite è zero, il che permette di concludere che f è differenziabile, e $df(0,0;h,k) = 0$.

Osserviamo che lo stesso problema per $f(x,y) = |xy|^{1/2}$ conduce allo stesso gradiente (f è nulla, e quindi costante, sugli assi, come prima), ma ad un diverso limite

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{|hk|^{1/2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Poiché la funzione è 0-omogenea e non costante (vale zero sugli assi, e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sulla bisettrice $h=k$), essa NON ha limite in $(0,0)$, da cui $|xy|^{1/2}$ __NON__ è differenziabile in $(0,0)$, pur avendo lì gradiente.

Una notevole conseguenza della rappresentazione del differenziale come prodotto scalare è la possibilità di semplificare significativamente la condizione necessaria di Fermat per i punti di estremo interni. Infatti, in ogni punto x_0, di massimo o di minimo interno in cui la funzione f sia differenziabile (e quindi dotata di tutte le derivate direzionali), si deve verificare:

$$f_v(x_0) = 0 \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

il che sembra comportare infinite verifiche, ma solo in apparenza! Se f è differenziabile $f_v(x_0) = \nabla f(x_0)\, v$, e dunque basta verificare che $\nabla f(x_0) = 0$ per ottenere automaticamente la condizione di Fermat $f_v(x_0)=0$ per tutte le derivate direzionali.

Dunque, massimi e minimi locali interni vanno ricercati fra i punti in cui il gradiente si annulla, e cioè fra le soluzioni del sistema $n \times n$, in generale non lineare

$$f_{x_1}(x_0) = 0 \;;\; f_{x_2}(x_0) = 0 ; \;\dots\; ; f_{x_n}(x_0) = 0$$

almeno se f è differenziabile.

I punti nei quali il gradiente si annulla vengono detti **CRITICI**, oppure **STAZIONARI**, o anche **SINGOLARI**. Fra di essi ci sono i massimi e minimi locali interni, ma non ci sono, di regola, i punti di minimo o massimo sulla frontiera o in punti nei quali le derivate direzionali non esistono. Ad esempio, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ha in $(0,0)$ un minimo globale interno al dominio ($\mathbb{R}^2$) in cui però non è derivabile, e dunque $(0,0)$ non può appartenere all'insieme delle soluzioni di $\nabla f(x,y)=0$.

Ci possono essere altri punti critici (selle) che non sono né di massimo né di minimo, come per $f(x,y)=x^2-y^2$, che è positiva sull'asse x, negativa sull'asse y, e vale 0 in $(0,0)$ (che dunque NON è né di massimo né di minimo); ciononostante, $(0,0)$ è critico per f, perché $\nabla f(x,y)=(2x,-2y)$, da cui $\nabla f(0,0)=(0,0)$.