IL CALCOLO DIFFERENZIALE (II)

Introduzione al differenziale di funzioni scalari.

La derivata direzionale consente già notevoli estensioni di alcuni concetti sviluppati per le funzioni in $\mathbb{R}$ alle funzioni di variabili vettoriali $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. L'esempio migliore è fornito dalle condizioni necessarie per gli estremi locali (Fermat), che vale in più variabili così come vale in una variabile, ed è stata usata da Eulero perfino in spazi di dimensione infinita, gettando così le basi dello studio degli estremi in spazi di funzioni, detto all'epoca "Calcolo delle Variazioni".

Ciononostante, la derivata direzionale presenta gravi lacune dal punto di vista teorico: una funzione può avere tutte le derivate direzionali nulle in un punto e non essere neppure continua in esso, come accade in $(0,0)$ alla funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

Si ha infatti, per $v=(\alpha,\beta)$ con α e β non entrambi nulli:

$$f_v(0,0) = \big(f(0+\alpha t, 0+\beta t)\big)'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha h,\beta h)-f(0,0)}{h} =$$

($h \neq 0 \Rightarrow (\alpha h, \beta h) \neq (0,0)$, perché α e β non sono entrambi nulli)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{(\alpha^2 h^2 \beta h)^2}{(\alpha^4 h^4 + \beta^2 h^2)^2} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1}{h} \frac{h^6}{h^4}}_{\downarrow \, 0} \left(\frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^4 h^2 + \beta^2} \right)^2$$

ove l'ultimo termine vale identicamente 0 per $\beta = 0$, e tende al limite finito $\frac{\alpha^4 \beta^2}{\beta^4} = \frac{\alpha^4}{\beta^2}$ se $\beta \neq 0$, ed è dunque limitato. Ne segue infine che la funzione è infinitesima perché prodotto di $\frac{1}{h} \frac{h^6}{h^4} = h$, infinitesima, e $\frac{\alpha^4 \beta^2}{(\alpha^4 h^2 + \beta^2)^2}$, convergente e quindi limitato.

Dunque, <u>OGNI DERIVATA DIREZIONALE DI f ESISTE E VALE ∅</u>.

Per vedere che, ciononostante, essa è discontinua, osserviamo che vale $\emptyset$ in $(\emptyset, \emptyset)$ mentre, sulle parabole $y = kx^2$, risulta (per $x \neq 0$)

$$f(x, kx^2) = \left(\frac{x^2 (kx^2)}{x^4 + k^2 x^4} \right)^2 \overset{x \neq 0}{=} \left(\frac{k}{1+k^2} \right)^2$$

Considerando, ad esempio, $k = 0$ e $k = 1$, ne segue che, sulla "parabola" $y = 0 \cdot x$, e cioè l'asse x ($y = 0$) si ha $f \equiv 0$, mentre sulla parabola $y = x^2$ la funzione assume il valore costante $\left(\frac{1}{1+1} \right)^2 = \frac{1}{4}$.

Poiché in ogni intorno dell'origine $(0,0)$ cadono punti dell'asse x e della parabola $y=x^2$ (che ha vertice in $(0,0)$) vorrà dire che, in ogni intorno di $(0,0)$, cadono punti sui quali f vale 0 ed altri sui quali vale $\frac{1}{4}$, contro la condizione di Cauchy per la convergenza di f in $(0,0)$: basta porre $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{4}$ per far sì che $|f(x)-f(y)|<\bar{\varepsilon}$ non sia realizzata su nessun intorno di $(0,0)$ per ogni coppia di punti x,y in quell'intorno: due punti sulle due "parabole" diverse verificano $|f(x)-f(y)|=\frac{1}{4}$, e quindi violano la condizione richiesta.

La via per estendere il concetto di derivata alle funzioni di più variabili in modo da conservare (almeno) la proprietà che se f è derivabile allora è continua richiede un cambio totale di prospettiva e, in certo senso, un ritorno al passato, alla geometria ed alla retta tangente.

Ciò sarà oggetto della prossima sezione.

LE FUNZIONI SU $\mathbb{R}^1$.

Uno dei problemi iniziali del calcolo infinitesimale, poi divenuto Analisi Matematica, è stato di caratterizzare il concetto di retta tangente per le curve per le quali una definizione geometrica intuitiva od una algebrica basata sulla molteplicità delle soluzioni di un'equazione algebrica, non sono possibili.

Sia f derivabile in x_0. Una qualunque retta (non verticale) per il punto del grafico $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

che definisce il grafico della funzione $g(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$

L'ipotesi di derivabilità implica che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha = f'(x_0) - \alpha \quad \begin{cases} \neq 0 & \text{per } \alpha \neq f'(x_0) \\ = 0 & \text{per } \alpha = f'(x_0) \end{cases}$$

Si osserva subito che l'infinitesimo $f(x) - g(x)$, per $x \to x_0$, è "normalmente" dello stesso ordine di $x - x_0$, mentre è d'ordine superiore solo se $\alpha = f'(x_0)$:

in tal caso, e solo in tal caso, il limite è nullo.
Ne segue che il caso $\alpha = f'(x_0)$ è "privilegiato" ed esprime il fatto che la retta grafico di $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approssima "meglio di tutte le altre", relative ad α diversi, la funzione $f(x)$ "in vicinanza" di x_0.
Prima di scrivere la versione "a più dimensioni" del limite oggetto di queste ultime riflessioni (il che non è immediato: basti riflettere a che $x - x_0$ è un vettore e non si può dividere per un vettore) riflettiamo sulla struttura di g. Tenendo da parte $f(x_0)$, che dipende solo dal punto scelto per definirvi la retta tangente, avanza il termine $f'(x_0)(x - x_0)$, e cioè una funzione lineare, nel senso dei matematici (o dell'Algebra Lineare, se preferite), dell'incremento $(x - x_0)$. L'Algebra stessa ci dice che ogni funzione lineare su $\mathbb{R}$ è del tipo $f(w) = \alpha w$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, ma l'α "giusto" per la retta tangente è $\alpha = f'(x_0)$.
E' tempo di passare a più variabili.

IL DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI SCALARI DI PIU' VARIABILI.

Un'osservazione utile per quanto seguirà è che, per $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se $\lim_{w\to 0}\frac{f(x_0+w)-f(x_0)-f'(x_0)w}{w}=0$ allora vale anche

$$\lim_{w\to 0}\frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-f'(x_0)w|}{|w|}=0$$

con il vantaggio decisivo che, anche se w fosse un vettore, quest'ultimo limite avrebbe senso, purché si interpreti $|w|$ come la norma di w. Ne segue la fondamentale

DEFINIZIONE Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, e sia $x_0\in\Omega$.
Allora, f si dirà **DIFFERENZIABILE IN** x_0, se esiste $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, **LINEARE**, tale che

$$\lim_{w\to 0}\frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|}=0$$

La funzione A verrà detta **DIFFERENZIALE** di f in x_0 e verrà denotato anche con

$$df(x_0, w) \equiv A(w)$$

La funzione f verrà detta differenziabile in Ω se è differenziabile in ogni punto di Ω.

Osserviamo che $df : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare nella seconda variabile (l'incremento w). Osserviamo inoltre che, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha $df(x_0, w) = f'(x_0) w$, ed f è differenziabile se e solo se è derivabile, ma differenziabile e derivata sono cose differenti anche se strettamente legate. I prossimi risultati ci diranno che questa è la strada giusta per estendere le derivate a più variabili.

TEOREMA: Se f è lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, allora è differenziabile in ogni punto, ed inoltre

$$df(x_0, w) = f(w)$$

Osserviamo che il differenziale non dipende dal punto x_0 (cioè è costante in x_0), esattamente come accade alle funzioni derivabili in $\mathbb{R}$ ove, se $f(x) = ax$, segue $f'(x_0) = a$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ (costante rispetto ad x_0, appunto!)

DIM. Poiché f è lineare in w, basta verificare che

$$\lim_{w\to 0} \frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-f(w)|}{|w|} = 0 \qquad (*)$$

Ciò è evidente perché, essendo f lineare, il numeratore è identicamente nullo in w.

$\blacksquare$

Il prossimo risultato realizza quanto preannunciato:

TEOREMA 2: Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0, allora è continua in x_0.

DIM. Sia A il differenziale di f in x_0. Allora

$$|f(x_0+w)-f(x_0)| = |f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)+A(w)| \underset{(\text{tr. ang.})}{\leq}$$

$$\leq |f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)| + |A(w)| =$$

$$= \underbrace{|w|}_{\to 0} \underbrace{\frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|}}_{\to 0} + |A(w)|$$

Il primo addendo della somma è prodotto di $|w|$, che tende a zero se $w \to 0$, e della frazione che tende a zero per l'ipotesi di differenziabilità. Basta dunque provare che $\lim_{w\to 0} |A(w)| = 0$.

Ciò segue immediatamente dalla struttura delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$: detta $e_1 \ldots e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$A(w) = A\left(\sum_1^n w_i e_i\right) = \sum_1^n w_i \underbrace{A(e_i)}_{a_i} = \sum_1^n w_i a_i$$

e poiché $w \to 0$ equivale a $w_i \to 0$ $\forall i = 1..n$, ne segue subito $\lim_{w \to 0} A(w) = 0$ e dunque $\lim_{w \to 0} |A(w)| = 0$.

Dalla stima iniziale segue infine

$$\lim_{w \to 0} |f(x_0 + w) - f(x_0)| = 0$$

e dunque

$$\lim_{w \to 0} f(x_0 + w) = f(x_0)$$

da cui la continuità di f in x_0

$\blacksquare$

Finora ci siamo accontentati del "minimo sindacale". La prossima sezione ci fornirà risultati più utili e, soprattutto, ci indicherà come fare a calcolare, in pratica, il differenziale.