IL CALCOLO DIFFERENZIALE (I)

La derivata direzionale ed il teorema di Fermat.

Il primo tentativo per estendere alle funzioni di più variabili il concetto di derivata è quello diretto: definire in modo sensato il rapporto incrementale e farne il limite al tendere a zero dell'incremento. Anche se, a ben vedere, il tentativo risulterà per molti versi inconcludente, esso permette di estendere uno dei più antichi ed importanti fra i "grandi risultati" dell'Analisi: la condizione di Fermat sulla derivata nei punti di estremo (massimo o minimo) interni. L'idea che seguiamo, adoperata molto di frequente in Analisi in più variabili, è di ridurre il problema ad una sola variabile, restringendo il dominio della funzione ad una retta uscente dal punto da studiare.

DEFINIZIONE Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $x_0 \in \Omega$. Si dice che f **E' DERIVABILE NELLA DIREZIONE DI v**, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, **SE ESISTE FINITO IL LIMITE**

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(x_0 + hv) - f(x_0)\right]$$

Esso verrà chiamato DERIVATA (DIREZIONALE) DI f NELLA DIREZIONE DI v in x_0, e denotato con uno qualunque dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0), \quad \frac{\partial f(x_0)}{\partial v}, \quad f_v(x_0), \quad \partial_v f(x_0)$$

Le derivate nelle direzioni dei versori della base canonica $e_1 \dots e_n$ si chiamano (da sempre) DERIVATE PARZIALI, e si denotano con i simboli speciali $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$, o $f_{x_i}(x_0)$, oppure $\partial_{x_i} f(x_0)$

NOTA: Se si pone $h(t) = f(x+tv)$, allora h è una funzione scalare di variabile scalare per tutti i t per i quali $x_0 + tv \in \mathrm{dom}\, f$ e la derivata direzionale appena definita coincide con $h'(0)$.

NOTA: Fissiamo il vettore e_1, primo della base canonica, e calcoliamo la derivata parziale rispetto ad x_i, $f_{x_i}(x_0)$, indicando esplicitamente tutte le componenti scalari di tutti i vettori in gioco. Dunque

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \qquad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ da cui

$$x_0 + hv = \left(x_1^0 + h \cdot 1,\ x_2^0 + h \cdot 0, \dots, x_n^0 + h \cdot 0\right)$$

ed infine

$$f_{x_1}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(x_0^1 + h, x_0^2, \dots x_0^n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)\right].$$

Si osserva subito che, per calcolare una derivata parziale (nel nostro caso, quella rispetto ad x_1, cioè e_1) basta tenere fisse tutte le coordinate tranne x_1 e calcolare l'ordinario limite del rapporto incrementale rispetto all'unica variabile rimasta, che è la derivata ordinaria della funzione d'una sola variabile

$$t \to f(t, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$$

Tutto ciò, oltre a spiegare abbastanza chiaramente il perché del nome "derivata PARZIALE" fornisce una regola pratica per il calcolo: "<u>LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE RISPETTO AD x_i SI CALCOLA COME PER LE FUNZIONI DELLA SOLA VARIABILE x_i, TRATTANDO LE ALTRE COME DELLE COSTANTI</u>".

ESEMPIO: Sia $f(x,y) = x^2 y$. Allora, per calcolare $f_x(x,y)$ occorre riguardare y come se fosse una costante, e derivare $x^2 y$ rispetto a x. Dunque

$$\partial_x (x^2 y) = y\, \partial_x (x^2) = 2xy$$

Analogamente

$$\partial_y (x^2 y) = x^2\, \partial_y (y) = x^2$$

Non occorre imparare niente di nuovo: basta solo ricordare che per le derivate parziali occorre pensare a tutte le altre variabili come a delle costanti che, nell'esempio precedente, "escono" dal simbolo di derivazione.

ESEMPIO: $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad x \neq 0$

Allora:

(y "costante") $$f_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

(x "costante") $$f_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

derivata della funzione "esterna"

derivata dell'argomento come funzione di y

QUESTO E' TUTTO ...

... O QUASI! Quando non funziona la derivazione in una variabile, non funzionano nemmeno le derivate parziali!

ESEMPIO: $f(x,y) = |xy|$. **Esistono** $f_x(0,0)$ **e** $f_y(0,0)$?

Non si può studiare la derivabilità mediante la derivazione di funzioni composte, perché $t \to |t|$ **NON** è derivabile in $t=0$, che è esattamente il punto coinvolto nel calcolo in $(0,0)$: infatti, posto $g(t) = |t|$, $f(x) = xy$ (y costante $=0$, e cioè l'ordinata di $(0,0)$) e $h(x) = g(f(x))$ si dovrebbe avere $h'(0) = g'(f(0))\, f'(0)$, ma $f(0)=0$ e $g'(0)$ non esiste ed il teorema sulla derivazione di funzioni composte non è applicabile.

In questi casi si rinuncia all'agilità delle regole di derivazione e si utilizza la definizione che è un comune rapporto di infinitesimi in una sola variabile, "trattabile" con il teorema di de l'Hospital, con la formula di Taylor o, al caso, con qualche limite notevole.

Il nostro esempio è più semplice!

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(h,0) - f(0,0)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[|h\cdot 0| - |0\cdot 0|\right] = 0$$

Un altro esempio, meno immediato, è il seguente:

ESEMPIO:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{in } (0,0) \\ \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

In tal caso, non ci sono problemi fuori dall'origine, perché f è, nell'intorno di tali punti, un rapporto di (composizioni) di funzioni derivabili, mentre l'origine è più delicato.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(h,0) - f(0,0)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\underbrace{\frac{\sin h^2}{h^2}}_{(h,0)\neq(0,0)} - 1\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3}$$

Ricordando che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ ne segue che $\sin t - t = \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ e ponendo $t = h^2$, ed essendo $\frac{\sin t - t}{t^3}$ non definita in 0, dal teorema del cambio di variabile segue

$$\sin h^2 - h^2 = \frac{h^6}{6!} + o(h^6)$$

da cui, infine,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin h^2 - h^2}{h^6}}_{\to \frac{1}{3!}} \cdot \underbrace{\frac{h^6}{h^3}}_{\to 0} = 0$$

Con lo stesso calcolo (simmetrico) si prova che

$$f_y(0,0) = 0$$

Il calcolo delle derivate direzionali per un'importante classe di funzioni, le funzioni differenziabili (che non vuol dire derivabili come in $\mathbb{R}$, dove le classi coincidono), si riduce a calcolare un prodotto scalare fra il vettore delle derivate parziali (il GRADIENTE, vedi più avanti) ed il vettore v. Ciò non è però valido in generale. Si può comunque adoperare la definizione

<u>ESEMPIO</u>: $f(x,y,z) = xyz^2$, $v = (-1,1,2) \neq 0$, $x_0 = (2,3,1)$. Esiste $f_v(2,3,1)$?

Si ha

$$f_v(2,3,1) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(x_0+tv) - f(x_0)\right] = h'(0)$$

ove

$$h(t) = f(2+(-1)t,\, 3+(1)t,\, 1+(2)t) = \underbrace{(2-t)}_{x}\underbrace{(3+t)}_{y}\underbrace{(1+2t)^2}_{z^2}$$

da cui

$$h'(t) = (2-t)'(3+t)(1+2t)^2 + (2-t)(3+t)'(1+2t)^2 +$$

$$+ (2-t)(3+t)\left[(1+2t)^2\right]' = -(3+t)(1+2t)^2 +$$

$$+ (2-t)(1+2t)^2 + (2-t)(3+t)\cdot 2(1+2t)\cdot 2$$

e, facendo $t=0$, si ha infine $f_v(2,3,1) = h'(0) = -3+2+24 = 23$

IL TEOREMA DI FERMAT.

La condizione seguente, nota già a Fermat, che la impiegò per provare che la legge di rifrazione della luce poteva essere spiegata ammettendo che la traiettoria della luce è quella che rende MINIMO il TEMPO di viaggio fra due qualunque punti, è fra le più importanti dell'Analisi.

TEOREMA (Fermat): Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$.
Sia $x_0\in\Omega$ verificante:

1) x_0 è interno ad Ω

2) x_0 è di minimo locale per f, e cioè
$\exists\,\delta>0:\ f(x_0)\le f(x)\quad \forall x\in \operatorname{dom} f\cap B_\delta(x_0)$

3) Esiste (finita) $f_v(x_0)$

Allora

$$f_v(x_0)=0$$

Prima di esporre la dimostrazione, osserviamo che il teorema esprime una condizione necessaria, ma non sufficiente, esattamente come in una variabile: nei massimi locali accade esattamente la stessa cosa (basta considerare $-f$), e non basta! La funzione $f(x,y)=xy$ è costante sugli assi coordinati, ed ha quindi entrambe le derivate parziali nulle in $(0,0)$, ma non ha ivi né massimo né minimo locale, perché cambia segno in ogni intorno dell'origine (negativa nel II e nel IV quadrante, positiva nel I e III quadrante). Nessuna sostanziale sorpresa in più variabili! Inoltre, il teorema vale per ogni derivata direzionale, indipendentemente dalle altre: ad esempio

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{se } xy=0\\ 1 & \text{se } xy\neq 0\end{cases}$$

ha in $(0,0)$ un minimo (globale) interno al dominio (tutto $\mathbb{R}^2$), ha solo le derivate parziali, che sono nulle in accordo al teorema, ma non ha alcun'altra derivata direzionale: infatti, per $v=(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\neq 0$ si ha:

$$f_v(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\underbrace{f(0+\alpha h,0+\beta h)}_{\substack{= 1 \text{ perché } \alpha h\neq 0\\ \beta h\neq 0}} - \underbrace{f(0,0)}_{=0}\Big] \quad \text{NON ESISTE!}$$

DIM. Poiché x_0 è interno ad Ω, $\exists\,\rho>0$:

$$B_\rho(x_0)\subseteq\Omega.$$

Poiché x_0 è un minimo locale di f, $\exists\,\delta>0$:

$$f(x_0)\le f(x)\quad \forall x\in \operatorname{dom} f\cap B_\delta(x_0)$$

Posta allora $\eta = \min(\delta, \rho)$, ne segue che

1) $B_\eta(x_0) \subseteq B_\rho(x_0) \subseteq \Omega = \operatorname{dom} f$

2) $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\eta(x_0)$ perché, da 1),

$B_\eta \subseteq \Omega$, ma anche $B_\eta \subseteq B_\delta$, da cui $B_\eta \subseteq \Omega \cap B_\delta$

Si consideri ora il segmento $x_0 + tv$ e si osservi che $|x_0 + tv - x_0| = |tv| = |t|\,|v| < \eta$ se (e solo se) $|t| < |v|^{-1}\eta$, da cui $x_0 + tv \in B_\eta(x_0)$ se e solo se $t \in \left]-\frac{\eta}{|v|}, \frac{\eta}{|v|}\right[$

Dunque, posto $h(t) = f(x_0 + tv)$, si ha che $h(t)$ è definita in $\left]-\frac{1}{|v|}\eta, \frac{1}{|v|}\eta\right[$ e che, inoltre,

$$h(0) = f(x_0) \leq f(x_0 + tv) \quad \forall t \in \left]-\frac{1}{|v|}\eta, \frac{1}{|v|}\eta\right[$$

perché $x_0 + tv \in B_\eta(x_0) \subseteq \Omega \cap B_\delta(x_0)$.

Si può dunque applicare il teorema di Fermat in una variabile alla funzione h, perché $t=0$ è un punto di minimo locale, interno, ove h è derivabile ($h'(0) = f_v(x_0)$) e dunque

$$h'(0) = 0$$

In definitiva, in un punto di minimo locale interno, qualunque derivata direzionale esista è nulla.

Il risultato non è molto incoraggiante: se, ad esempio, f avesse tutte le derivate direzionali, gli eventuali punti di estremo interno dovrebbero verificare le infinite condizioni

$$f_v(x_0) = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

La situazione è di molto semplificata se f è differenziabile (vedi più avanti): in tal caso, le infinite condizioni si riducono alle n equazioni

$$f_{x_i}(x_0) = 0 \qquad i = 1..n$$

un sistema (non lineare, in generale) $n \times n$: un'eccellente generalizzazione a n variabili della condizione $f'(x_0) = 0$.

Vedremo che essa può anche venire scritta come

$$f'(x_0) = 0$$

purché ci si ricordi che, per una funzione scalare di n variabili, col simbolo $f'(x_0)$ si intende il suo gradiente (così come per una funzione vettoriale di n variabili, si intenderebbe la jacobiana). I dettagli seguiranno tra breve.