IL TEOREMA DI BINET

(14/12/2016)

Questa breve nota contiene la dimostrazione del teorema di Binet sul determinante della matrice prodotto a partire dalla definizione di determinante come unica funzione multilineare e alternante che vale 1 sulla base canonica.

TEOREMA (BINET): Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

DIM.

Supponiamo inizialmente $\det A \neq 0$.

Definiamo una funzione delle colonne $B_1, \ldots, B_n$ di B ponendo

$$\varphi(B_1, \ldots, B_n) = \frac{1}{\det A} \det(AB_1, AB_2, \ldots, AB_n)$$

Osserviamo che φ è ben definita, in quanto $\det A \neq 0$, e che

$$AB = (AB_1 \; AB_2 \ldots AB_n)$$

Verificheremo ora che φ è alternante, lineare rispetto alla prima colonna (e quindi rispetto a tutte le altre, dopo lo scambio con la prima), e vale 1 sulla base canonica. Per l'**UNICITÀ** del determinante, ne seguirà subito $\varphi(B_1 \ldots B_n) = \det(B_1, \ldots, B_n) = \det B$, da cui

$$\det B = \frac{1}{\det A} \det(AB)$$

che è la tesi. In effetti:

1) scambiare due colonne fra gli argomenti di φ comporta

un identico scambio fra quelli corrispondenti in $\det(AB_1, .., AB_n)$ e, di conseguenza, tale determinante cambierà segno. Inoltre:

2) $$\varphi(B_1+B_1', B_2 .. B_n) = \frac{1}{\det A} \det(A(B_1+B_1'), AB_2, .., AB_n) =$$

(dalla multilinearità del determinante)

$$= \frac{1}{\det A} \left[\det(AB_1, AB_2, .., AB_n) + \det(AB_1', AB_2, .., AB_n) \right] =$$

$$= \varphi(B_1, B_2, .., B_n) + \varphi(B_1', B_2, ..., B_n)$$

Analogamente, sempre per la multilinearità,

$$\varphi(\lambda B_1, B_2, ..., B_n) = \frac{1}{\det A} \det(A(\lambda B_1), AB_2, ..., AB_n) =$$

$$= \lambda \frac{1}{\det A} \det(AB_1, ..., AB_n) = \lambda \varphi(B_1 .. B_n)$$

Infine, detta $e_1 \ldots e_n$ la base canonica, si ha:

3) $$\varphi(e_1, \ldots, e_n) = \frac{1}{\det A} \det(Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n)$$

e, ricordando che $Ae_i = A_i$ (i-esima colonna di A), ne segue $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$, e la tesi è provata nel caso $\det A \neq 0$.

Resta da provare la formula nel caso $\det A = 0$, e cioè provare che $\det A = 0 \Rightarrow \det(AB) = 0$.

Dette $A^1, \ldots, A^n$ le righe di A, esse sono dipendenti perché $\det A = 0$, e dunque esisteranno $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, non tutti nulli, tali che $\sum_1^n \lambda_i A^i = 0$.

Ora, le righe di AB sono $A^1B, \ldots, A^nB$ e, dalla proprietà distributiva, $\sum_1^n \lambda^i (A^iB) = \left(\sum_1^n \lambda_i A^i\right) B = 0B = 0$. Poiché qualche λ_i è non nullo, ne segue che $A^1B, \ldots, A^nB$ sono dipendenti, e quindi $\det(AB) = 0$.

$\blacksquare$