INDIPENDENZA LINEARE

Dati n vettori $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$ è stato introdotto il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ da essi generato

$$<A_1, A_2, \dots, A_n> \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \quad x = \sum_1^n \alpha_i x_i \right\}$$

Tale concetto conduce alla definizione di DIPENDENZA LINEARE, uno dei cardini di tutta la teoria dell'Algebra Lineare.

DEFINIZIONE Un sottinsieme di uno spazio vettoriale è detto linearmente dipendente (o, più brevemente, dipendente) se uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Dunque, due vettori allineati o tre vettori complanari in $\mathbb{R}^3$ sono dipendenti. Una utile caratterizzazione, spesso utilizzata come definizione alternativa è

LEMMA: condizione necessaria e sufficiente perché $A_1 \dots A_n$ siano dipendenti è che esistono $\alpha_1 \dots \alpha_n$ NON TUTTI NULLI tali che

$$\sum_1^n \alpha_i x_i = 0$$

Dim. (C.N.) Siano $A_1 \dots A_n$ dipendenti. Allora uno di essi, diciamolo A_j, è combinazione degli altri, e cioè esistono $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tali che

$$A_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i A_i$$

ne segue che $\sum_{i\neq j} \alpha_i A_i - A_j = 0$ e dunque esiste una combinazione di $A_1 \dots A_n$ a coefficienti non tutti nulli ($\alpha_j = -1$) tale che la somma è nulla.

(condizione sufficiente) Sia $\sum \alpha_i A_i = 0$ e se $\alpha_j \neq 0$. Allora si ha

$$\alpha_j A_j = -\sum_{i\neq j} \alpha_i A_i$$

e moltiplicando ambo i membri per α_j^{-1} (α_j è diverso da zero!) si ha infine

$$A_j = -\sum_{i\neq j} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A_i$$

e dunque uno dei vettori è combinazione degli altri.

Un insieme di vettori che non sia dipendente è detto LINEARM. INDIPENDENTE. La caratterizzazione precedente fornisce subito il seguente criterio:

LEMMA $A_1 \dots A_n$ <u>sono linearmente indipendenti se e solo se</u>

$$\sum_1^n \alpha_i A_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \ \forall i$$

Un'importantissima conseguenza dell'indipendenza lineare è espressa dal seguente

LEMMA: Siano $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ in uno spazio vettoriale, tali che

$$B = \sum_1^n \alpha_i A_i$$

per un'opportuna scelta dei coefficienti $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Allora $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se la scelta degli α_i è unica per ogni B per il quale esistano.

<u>DIM.</u> Siano $A_1 \dots A_n$ indipendenti e siano α_i, α_i' tali che

$$B = \sum_1^n \alpha_i A_i \quad \text{e} \quad B = \sum_1^n \alpha_i' A_n$$

sottraendo membro a membro si ottiene

$$0 = \sum_1^n (\alpha_i - \alpha_i') A_i$$

e, dall'indipendenza di $A_1 \dots A_n$ ne segue

$$\alpha_i - \alpha_i' = 0 \quad \forall i$$

da cui l'unicità.

Supponiamo ora che per ogni B per il quale esistono $\alpha_i : B = \sum_1^n \alpha_i A_i$ tale scelta di α_i sia unica. Allora l'unica soluzione di

$$\sum_1^n \alpha_i A_i = 0$$

sarà $\alpha_i = 0 \ \forall i$, da cui l'indipendenza.

ESEMPI.

1) Ogni sistema contenente $\emptyset$ è dipendente in quanto

$$\alpha \emptyset + \sum_1^n \alpha_i A_i = 0$$

per ogni $\alpha \neq 0$ arbitrario e $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \dots n$.

2) Due vettori non nulli sono dipendenti se uno è multiplo dell'altro. Infatti se $\alpha u + \beta v = 0$ e $\alpha \neq 0$ allora $u = -\frac{\beta}{\alpha} v$. Osserviamo che anche β è non nullo se u e v lo sono.

3) Le potenze $1, t, t^2, t^3, \dots, t^n$ sono indipendenti nello spazio vettoriale dei polinomi. Se, infatti, $\sum_0^n \alpha_k t^k \equiv 0$, per il principio di identità dei polinomi, $\alpha_k = 0 \ \forall i = 0 \dots n$. Per dimostrarlo osserviamo che

$$\alpha_0 = \left(\sum_0^n \alpha_k t^k\right)_{t=0} = 0$$

da cui

$$0 \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_k t^k = t \sum_{k=1}^n \alpha_k t^{k-1} \quad \text{su } \mathbb{R} \ (\text{o } \mathbb{C})$$

e infine, dalla continuità dei polinomi

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k t^{k-1} \equiv 0 \quad \text{su } \mathbb{R} \ (\text{o } \mathbb{C})$$

Da ciò

$$\alpha_1 = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k t^{k-1}\right)_{t=0} = 0$$

e dunque
$$t\sum_{k=2}^{n}\alpha_k t^{k-2}\equiv 0$$
e dalla continuità
$$\sum_{k=2}^{n}\alpha_k t^{k-2}\equiv 0$$
Iterando il ragionamento segue $\alpha_k=0\ \forall k$.

4) $1, \sin^2 t, \cos 2t$ sono dipendenti in $C^0(\mathbb{R})$, in quanto
$$\cos 2t = 1-2\sin^2 t$$

5) $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \dots, e^{\alpha_n t}$ sono indipendenti se i complessi α_i sono a due a due distinti. Infatti, da
$$c_1 e^{\alpha_1 t}+c_2 e^{\alpha_2 t}+\dots+c_n e^{\alpha_n t}\equiv 0$$
dividendo per $e^{\alpha_1 t}$, che è sempre non nullo, segue
$$c_1+\sum_2^n c_k e^{(\alpha_k-\alpha_1)t}\equiv 0$$
e, derivando,
$$\sum_2^n c_k(\alpha_k-\alpha_1)e^{(\alpha_k-\alpha_1)t}\equiv 0$$
Poiché il numero degli esponenziali si è abbassato di uno, si può pensare di usare l'induzione.

$n=1$ $\quad$ se $c_1 e^{\alpha_1 t}\equiv 0 \Longrightarrow c_1=0$ perché $e^{\alpha_1 t}\neq 0\ \forall t,\alpha_1$

se si suppone vera la tesi per $n-1$, da
$$\sum_1^n c_k e^{\alpha_k t}\equiv 0$$
per l'osservazione precedente segue $\sum_2^n c_k(\alpha_k-\alpha_1)e^{(\alpha_k-\alpha_1)t}\equiv 0$ e, per l'ipotesi induttiva
$$c_k(\alpha_k-\alpha_1)=0\ \forall k$$

e da $\alpha_k - \alpha_1 \neq 0$ se $k \neq 1$ segue $C_k = 0 \ \forall k$.

(6) I vettori

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

con $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$, sono indipendenti in $\mathbb{R}^n$.

Infatti il sistema

$$\sum_1^n x_i A_i = 0$$

è triangolare

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & & & x_n & \\ a_{11} & a_{12} & - & - & a_{1n} & 0 \\ 0 & a_{22} & & & a_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}$$

ha soluzione unica perché gli elementi sulla diagonale sono diversi da zero: risolvendo a partire dall'ultima equazione e sostituendo alle incognite nelle precedenti, si ottiene

$$x_n = 0 \quad x_{n-1} = 0 \quad \cdots \quad x_2 = 0 \quad x_1 = 0$$

da cui l'indipendenza.

(7) Un caso particolare è il seguente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una più semplice dimostrazione è

$$\sum x_i A_i = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

da cui $\sum x_i A_i = 0 \iff x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$

(8) Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ distinti a due a due.
Allora $\frac{1}{t-\alpha_1}, \frac{1}{t-\alpha_2}, \dots, \frac{1}{t-\alpha_n}$ sono indipendenti.

Infatti, da
$$\sum_1^n \frac{c_i}{t-\alpha_i} \equiv 0$$
moltiplicando per $t-\alpha_i$ si ottiene
$$c_i + \sum_{j\neq i} c_j \frac{t-\alpha_i}{t-\alpha_j} \equiv 0$$
equivalente alla precedente per ogni $t \neq \alpha_i$. Facendo tendere t ad α_i ne segue $c_i = 0$, e ripetendo per ogni i segue la tesi.

(9) Siano $\alpha_1 \dots \alpha_k$ a due a due distinti e siano $\mu_1 \dots \mu_k$ interi maggiori o eguali a zero. Allora

$$\frac{1}{t-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{(t-\alpha_1)^{\mu_1}}, \frac{1}{t-\alpha_2}, \dots, \frac{1}{(t-\alpha_2)^{\mu_2}}, \dots \frac{1}{t-\alpha_k}, \dots, \frac{1}{(t-\alpha_k)^{\mu_k}}$$

sono indipendenti. Infatti, sia

$$\frac{c_{11}}{t-\alpha_1} + \dots + \frac{c_{1\mu_1}}{(t-\alpha_1)^{\mu_1}} + \frac{c_{21}}{(t-\alpha_2)} + \dots + \frac{c_{2\mu_2}}{(t-\alpha_2)^{\mu_2}} + \dots + \frac{c_{k1}}{(t-\alpha_1)} + \dots + \frac{c_{k\mu_k}}{(t-\alpha_k)^{\mu_k}} \equiv 0$$

moltiplicando per $(t-\alpha_1)^{\mu_1}$ si ottiene

$$c_{11}(t-\alpha_1)^{\mu_1-1} + c_{12}(t-\alpha_1)^{\mu_1-2} + \dots + c_{1\mu_1} +$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{\mu_h} c_{jh} \frac{(t-\alpha_1)^{\mu_1}}{(t-\alpha_j)^h} \equiv 0$$

equivalente alla precedente per $t \neq \alpha_i$. Facendo $t \to \alpha_1$ segue $c_{1\mu_1} = 0$. Eliminato il termine corrispondente, moltiplicando per $(t-\alpha_1)^{\mu_1-1}$ e facendo $t \to \alpha_1$ si ottiene

$$c_{1(\mu_1-1)} = 0$$

e ripetendo per tutti i termini, cominciando dalle potenze più grandi a ritroso, si ottiene la tesi.

DIPENDENZA LINEARE E SPAN

L'argomento di queste sezione è al cuore della teoria. Siano $A_1 .. A_n$ un numero finito di vettori e si consideri lo spazio da essi generato

$$\langle A_1, A_2, .., A_n \rangle$$

Il problema che verrà esaminato è: "Sotto quali condizioni lo span $\langle A_1 .. A_n \rangle$ resta invariato se si elimina uno dei vettori A_i"?

La risposta a questa domanda, assieme ad alcune sue utili conseguenze, è contenuta nei seguenti Lemmi, di importanza sproporzionata alla loro semplicità dimostrativa. L'idea è che un vettore dipendente dagli altri non aggiunge "nulla di nuovo" al loro span, e può essere aggiunto o eliminato a piacere senza alterarlo. In coda verrà presentata una conseguenza diretta della definizione di indipendenza lineare, anch'essa impiegata in seguito.

<u>LEMMA FONDAMENTALE</u> $\langle A_1, A_2, .., A_n \rangle = \langle A_2, .., A_n \rangle$ <u>se e solo se</u> A_1 <u>è combinazione lineare di</u> $A_2, .., A_n$.

<u>Dim.</u> Di certo $\langle A_2, .., A_n \rangle \subseteq \langle A_1, A_2, ..., A_n \rangle$, in ogni caso.
Se $\langle A_1, A_2, .. A_n \rangle = \langle A_2, .., A_n \rangle$ si ha $A_1 \in \langle A_2, .., A_n \rangle$ e dunque $A_1 = \sum_2^n \alpha_i A_i$.
Sia ora $A_1 = \sum_2^n \alpha_i A_i$. Allora, se $B \in \langle A_1, .., A_n \rangle$ si ha

$$B = \sum_1^m \beta_i A_i = \beta_1 A_1 + \sum_2^n \beta_j A_j = \beta_1 \sum_2^m \alpha_i A_i + \sum_2^n \beta_j A_j$$

e dunque $B \in \langle A_2, ..., A_n \rangle$. $\boxed{//}$

Una conseguenza immediata del Lemma precedente è

LEMMA (di scambio) Sia $B \in \langle A_1 \dots A_n \rangle$, $B \neq 0$.
Allora, per qualche j fra 1 ed n,
$$\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \langle B, \{A_i : i \neq j\} \rangle$$
e cioè B può sostituire uno degli A_i, scelto opportunamente, senza alterare lo spazio generato.

DIM. Dall'ipotesi segue $B = \sum_1^n \alpha_i A_i$

Poiché B non è nullo esiste j : $\alpha_j \neq 0$. Allora
$$B = \alpha_j A_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i A_i \implies A_j = \frac{1}{\alpha_j} B - \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A_i$$
Dal Lemma fondamentale, essendo $B = \sum \alpha_i A_i$, segue prima che
$$\langle A_1, \dots, A_n \rangle = \langle A_1 \dots A_n, B \rangle$$
e poi, essendo $A_j \in \langle B, \{A_i : i \neq j\} \rangle$, segue anche che
$$\langle A_1, \dots, A_n, B \rangle = \langle \{A_i : i \neq j\}, B \rangle$$
perché A_j essendo dipendente da B e dai rimanenti A_i, può essere eliminato senza alterare lo spazio.

Un ultimo Lemma, nello stesso ordine d'idee, deriva direttamente dalla definizione d'indipendenza lineare.

LEMMA Siano $A_1, \dots, A_n$ vettori indipendenti, e sia
$$B \notin \langle A_1 \dots A_n \rangle$$
Allora $A_1, \dots, A_n, B$ sono indipendenti.

Dim. Supponiamo per assurdo che $A_1 \dots A_n, B$ fossero dipendenti, e cioè esistano α_i e β, non tutti nulli, tali che
$$\sum_1^n \alpha_i A_i + \beta B = 0$$

Se ora fosse $\beta = 0$, dall'indipendenza di $A_1, \dots, A_n$ ne seguirebbe $\alpha_i = 0 \ \forall i$, contro l'assunto che α_i e β non siano tutti nulli. Dunque $\beta \neq 0$, da cui, risolvendo rispetto a B, segue

$$B = -\sum_1^n \frac{\alpha_i}{\beta} A_i$$

e infine $B \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$, contro l'ipotesi.

<u>Definizione</u>: B sarà detto indipendente da $A_1 \dots A_n$ se e solo se

$$\sum \alpha_i A_i + \beta B = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Ne segue immediatamente un ultimo

<u>Lemma</u> Condizione necessaria e sufficiente perché

$$\langle A_1, \dots, A_n \rangle \subset \langle A_1, A_2, \dots, A_n, B \rangle$$

è che B sia indipendente da $A_1 \dots A_n$

<u>CNS</u> Perché B sia indipendente da $A_1 \dots A_n$ è che $B \notin \langle A_1 \dots A_n \rangle$

<u>CN</u> Se fosse $B \in \langle A_1 \dots A_n \rangle$ si avrebbe $B = \sum \alpha_i A_i \Rightarrow B - \sum \alpha_i A_i = 0$ contro l'indipendenza

<u>CS</u>. Se fosse B dipendente si avrebbe $B = -\sum \frac{\alpha_i}{\beta} A_i \Rightarrow B \in \langle A_1 \dots A_n \rangle$.

BASI

Verranno presentati qui di seguito i teoremi fondamentali legati al concetto di **base** di uno spazio vettoriale.

Iniziamo col ricordare che uno spazio vettoriale X si dice di dimensione finita se e solo se ammette un sistema di generatori, cioè se esistono $x_1 \dots x_n \in X$ tali che $X = \langle x_1, \dots x_n \rangle$, e si dice di dimensione infinita se non esistono tali sistemi.

<u>DEFINIZIONE</u> Dato uno spazio vettoriale X, una sua **base** è un insieme finito $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tali che

1) $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$
2) $x_1 \dots x_n$ sono indipendenti

In sostanza, una base è un sistema di generatori indipendenti.
Esistono spazi sprovvisti di sistemi finiti di generatori.
Ad esempio i polinomi formano uno spazio vettoriale, utilizzando come scalari lo spazio dei coefficienti ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), come somma e prodotto per uno scalare quello eseguito punto per punto,

come zero il polinomio identicamente nullo e come opposto il polinomio cambiato di segno. Tale spazio non può ammettere sistemi di generatori perché qualunque insieme finito di polinomi non può, con le sue combinazioni lineari, generare un polinomio di grado maggiore dell'esponente massimo dell'indeterminata che appare fra essi. Dunque, ne segue

LEMMA <u>I polinomi sono uno spazio di dimensione infinita.</u>

Sia ora X uno spazio di dimensione finita. In tal caso esiste un numero finito di generatori e, inoltre

TEOREMA (di esistenza della base) <u>Se</u> $X \neq \{0\}$ <u>e</u> X <u>è di dimensione finita</u>, <u>allora</u> X <u>ha una base</u>.

<u>Dim</u> Poiché X è di dimensione finita, è generato da un numero finito di vettori $x_1, \dots x_n$. Poiché inoltre $X \neq \{0\}$, uno almeno di essi è non nullo. Se $x_1, \dots x_n$ sono indipendenti essi costituiscono la base richiesta; se non lo sono uno di essi è combinazione degli altri e, per il Lemma fondamentale può essere eliminato senza alterare lo span, che è X. Si può continuare ad eliminare i vettori del sistema dipendenti dagli altri, ottenendo un sistema che ha lo stesso span, X, ma è formato da vettori indipendenti, in quanto, essendo X <u>non</u> ridotto al solo 0, contiene vettori non nulli. Il sistema di generatori così trovato è indipendente e quindi è una base.

Il prossimo risultato è il cuore del capitolo

TEOREMA (sul massimo numero di vettori indipendenti)

Sia X uno spazio di dimensione finita e sia $x_1 \dots x_n$ una sua base. Allora, dati $y_1, \dots, y_m \in X$, $m > n$, essi risultano dipendenti.

In sostanza, se $x_1 \dots x_n$ è una base di X, n è il massimo numero di vettori indipendenti reperibili in X.

Dim. Se qualcuno degli y_i è nullo il sistema è dipendente. Siano dunque $y_1 \dots y_m$ vettori non nulli di X.
Da $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ segue $y_1 \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Poiché $y_1 \neq 0$, dal lemma di scambio segue che y_1 può essere scambiato con qualcuno degli x_i, che supponiamo per brevità essere x_1, senza alterare lo span. Si ha allora $X = \langle y_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.
Da $y_2 \in X$ segue $y_2 = \alpha y_1 + \sum_2^n \beta_i x_i$. Se ora $\beta_i = 0 \ \forall i = 2 .. n$, allora y_2 è un multiplo di y_1, il sistema $y_1, y_2, \dots, y_m$ è dipendente, e la tesi è provata. Se invece $\beta_i \neq 0$ allora il vettore x_i corrispondente può essere scambiato con y_2 senza alterare lo span. Supponiamo che sia x_2 (altrimenti si riordinano i vettori $x_1 - x_n$), e dunque $X = \langle y_1, y_2, x_3, \dots, x_n \rangle$. Proseguiamo a scambiare i vettori y_i che seguono, fermandoci se essi sono combinazione dei soli vettori y_i già scambiati (nel qual caso $y_1 \dots y_m$ è dipendente) oppure scambiandoli con qualcuno degli x_i (che supponiamo sempre per brevità essere il primo disponibile) in caso contrario. Ne segue che, se non ci siamo già arrestati perché i primi y_i sono già dipendenti,

di arrivo dopo n scambi si avrà $X = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ e poiché $m > n$, ciò implica che ogni y_j, $j > n$, appartiene a $\langle y_1 \dots y_n \rangle$, e dunque $y_1, \dots y_m$ sono dipendenti.

COROLLARIO Se $x_1 \dots x_n$ è una base di X e $y_1 \dots y_m$ sono indipendenti, allora $m \leq n$.

Il prossimo risultato è di importanza tale da meritare un enunciato a parte.

TEOREMA (della dimensione). Sia X di dimensione finita. Allora tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi, detto **dimensione di** X ($\dim X$).

Dim. Poiché X è di dimensione finita, per il teorema di esistenza, ammette basi. Siano $x_1 \dots x_n$ e $y_1 \dots y_m$ due di esse e sia $m \geq n$. Se fosse $m > n$, dal teorema sul massimo numero di vettori indipendenti essendo $x_1 \dots x_n$ una base, ne seguirebbe che $y_1 \dots y_m$ sono dipendenti, contro l'ipotesi che siano una base e dunque $n = m$. Analogo ragionamento se $n \geq m$.

Un'altra conseguenza pressoché immediata dei risultati precedenti, di grande importanza e utilità è il seguente:

TEOREMA (dei generatori) Sia X uno spazio di dimensione n. Allora, qualunque sistema di n vettori di X, che siano indipendenti, è una base di X. Inoltre, ogni sistema di n generatori di X è una base.

Dim. Sia $y_1 \dots y_n$ un qualunque sistema indipendente in X. Se fosse $\langle y_1, \dots, y_n \rangle \subset X$, esisterebbe $b \in X$ tale che $b \notin \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ e, poiché $y_1 \dots y_n$ sono indipendenti per ipotesi, per il terzo dei lemmi anche $y_1, \dots, y_n, b$ lo sarebbero. Ciò è assurdo, perché in X, di dimensione n, ci sarebbero $n+1$ vettori indipendenti, contro il teorema sul massimo numero di vettori indipendenti. Dunque $\langle y_1, \dots, y_n \rangle = X$ e dunque $y_1 \dots y_n$, essendo generatori indipendenti, sono una base.

Siano inoltre $y_1, \dots, y_n \in X$ tali che $\langle y_1 \dots y_n \rangle = X$. Se fossero dipendenti, allora almeno un elemento potrebbe essere eliminato senza alterare lo span. Procedendo come nel teorema di esistenza della base si potrebbe allora continuare ad eliminare gli eventuali altri elementi dipendenti ottenendo una base di dimensione massima $n-1$, il numero dei vettori di partenza dopo avere eliminato quello che si è supposto essere dipendente. Ciò contraddice il teorema della base.

Il prossimo è un altro risultato riguardante le basi di qualche utilità.

TEOREMA (del completamento). Sia X di dimensione n e siano $y_1, \dots, y_m \in X$, indipendenti, con $m < n$. Allora esistono $v_{m+1}, \dots, v_n$ vettori in X tali che $y_1, \dots, y_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ è una base.

Dim. Poiché $\dim(X) = n$, esiste una base $v_1 \dots v_n$ di X. Si procede allora come nel teorema sul massimo numero di vettori indipendenti, scambiando uno alla volta i vettori $y_1, \dots, y_m$ con altrettanti $v_{j_1} \dots v_{j_m}$. Poiché ad ogni passo i il vettore y_i è indipendente dai precedenti $y_1 \dots y_{i-1}$ ne segue che nell'uguaglianza

$$y_i = \sum_{1}^{i-1} \alpha_k y_k + \sum_{i+1}^{n} \beta_j v_j$$

almeno uno dei β_j deve essere non nullo, il che consente di scambiare y_i con il corrispondente v_j. Sia j_i l'indice del β_j non nullo. Alla fine degli scambi, tutti gli $y_1 \dots y_m$ sono stati scambiati con altrettanti $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_m}$, mantenendo lo stesso span, X. Ne segue che $\{y_1, \dots, y_m\} \cup \{v_j : j \neq j_1 \dots j_m\}$ sono n generatori di X, che è di dimensione n, e dunque, per il teorema dei generatori, formano la base di X richiesta.