APPLICAZIONI LINEARI

Dati due spazi vettoriali (reali o complessi) X e Y, studieremo le proprietà generali delle funzioni (dette anche operatori, o applicazioni) **LINEARI** $A : X \to Y$, verificanti cioè

1) Proprietà d'additività

$$A(x+x') = A(x) + A(x') \quad \forall x, x' \in X$$

2) Proprietà d'omogeneità

$$A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\in \mathbb{C})$$

In altri contesti (teoria dell'integrazione o teoria delle funzioni omogenee, in Analisi Matematica) le stesse denominazioni vengono attribuite a concetti differenti. Le due proprietà, assieme, sono equivalenti a

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

che è detta proprietà di **LINEARITÀ**, e che può essere espressa dicendo che una funzione A è lineare se si distribuisce sulle combinazioni lineari. Essa implica le due proprietà precedenti ($\lambda = \mu = 1$ per l'additività e $\mu = 0$ per l'omogeneità) ed è da esse implicata

$$A(\lambda x + \mu y) \overset{\text{(additività)}}{=} A(\lambda x) + A(\mu y) =$$

$$\overset{\text{(omogeneità)}}{=} \lambda A(x) + \mu A(y)$$

Si osserva subito che $A(0) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0$, e dunque tutte le funzioni lineari mandano il vettore nullo di X in quello di Y.

Lo spazio X viene detto dominio di A e Y codominio, con la normale terminologia delle funzioni. Analogamente, si definisce l'immagine di A, denotata con $A(X)$ o $\operatorname{Im} A$, ponendo

$$A(X) = \{ y \in Y \ \exists x \in X : A(x) = y \}$$

e la controimmagine $A^{-1}(y)$ di un punto dell'immagine $y \in A(X)$, ponendo

$$A^{-1}(y) = \{ x \in X : A(x) = y \}.$$

Si pone inoltre, $\forall \, W \subseteq A(X)$

$$A^{-1}(W) = \bigcup_{w \in W} A^{-1}(w) = \{ x \in X : A(x) \in W \}$$

Richiamiamo alcune definizioni già introdotte nella teoria delle funzioni, che restano identiche nel caso particolare delle funzioni lineari. La funzione lineare $A : X \to Y$ si dice

iniettiva se e solo se $A(x) = A(y) \implies x = y$

(ad elementi distinti corrispondono elementi distinti)

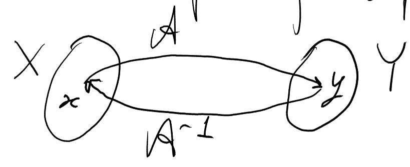
suriettiva se e solo se $\forall y \in Y \ \exists x \in X : A(x) = y$

(ossia se $A(X) = Y$).

biiettiva se e solo se è iniettiva e suriettiva

Le funzioni biiettive rivestono un ruolo molto importante: sono *invertibili*. Infatti, se A è biiettiva allora, per ogni fissato $y \in Y$, esistono soluzioni x dell'equazione $A(x)=y$ (e cioè punti nella sua controimmagine) in quanto A è suriettiva; essendo anche iniettiva la controimmagine di y non può contenere punti distinti, che avrebbero immagini distinte. Si può allora definire una nuova funzione su Y, che associa ad ogni punto $y \in Y$ l'unico elemento della sua controimmagine. In tal caso la funzione $A^{-1}(y)$ non associa ad y l'*insieme* $A^{-1}(y)$ ma uno e un solo valore, e definisce quindi una funzione $A^{-1}: Y \to X$ (invece che da $Y \to \mathcal{P}(X)$, come di solito), che verifica per definizione

$$A(A^{-1}(y)) = y \qquad A^{-1}(A(x)) = x$$



e che viene perciò detta *funzione inversa* di A. Si ha il seguente

LEMMA (linearità dell'inversa). *Sia $A: X \to Y$ biiettiva, e lineare. Allora la sua inversa è lineare da Y in X.*

Dim. Siano $y_1, y_2 \in Y$ e siano $x_1 = A^{-1}(y_1)$ e $x_2 = A^{-1}(y_2)$. Si osserva che $A(x_1) = y_1$ e $A(x_2) = y_2$ e dunque, poiché A è lineare, ne segue $A(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$. Dalla definizione d'inversa si ha allora $A^{-1}(y_1) + A^{-1}(y_2) = x_1 + x_2 = A^{-1}(y_1 + y_2)$, il che verifica l'additività di A^{-1}. Analogamente, da $A(x) = y$ segue $A(\lambda x) = \lambda y$ e dunque $A^{-1}(\lambda y) = \lambda x = \lambda A^{-1}(y)$ e dunque A^{-1} è anche omogenea e la prova è completa.

Una definizione propria delle funzioni lineari è invece quella di nucleo.

DEFINIZIONE Data $A : X \to Y$, lineare, si definisce il **nucleo** di A, denotato col simbolo $\operatorname{Ker} A$ (dalla parola anglosassone **Kernel**) ponendo

$$\operatorname{Ker} A = \{ x \in X \; ; \; A(x) = 0 \}$$

e dunque il nucleo di A è la controimmagine dello 0, e contiene almeno il vettore nullo di X, perché $A(0) = 0$.

Le proprietà del nucleo verranno studiate nella prossima sezione.

PROPRIETA' DI NUCLEO E IMMAGINE

Le definizioni precedenti di nucleo e di immagine dicono che essi sono sottoinsiemi, rispettivamente, del dominio e del codominio dell'applicazione; in realtà, se la funzione è lineare, essi sono <u>sottospazi</u>.

TEOREMA <u>Sia $A: X \to Y$, lineare. Allora $\mathrm{Ker}\, A$ è un sottospazio di X.</u>

<u>Dim.</u> Siano $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}\, A$, sicché $A(x_1) = A(x_2) = 0$. Si ha, dalla linearità di A, $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = 0 + 0 = 0$, e dunque anche $x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}\, A$, che risulta chiuso rispetto alla somma. Inoltre se $x \in \mathrm{Ker}\, A$ si ha $A(x) = 0$, da cui $A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda 0 = 0$ e dunque anche $\lambda x \in \mathrm{Ker}\, A$, che è allora un sottoinsieme di X chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare, ed è quindi un sottospazio.

TEOREMA <u>Sia $A: X \to Y$, lineare. Allora $A(X)$ è un sottospazio di Y</u>

<u>Dim.</u> Siano $y_1, y_2 \in A(X)$, e siano x_1, x_2 tali che $A(x_1) = y_1$ e $A(x_2) = y_2$. Dalla linearità di A segue $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = y_1 + y_2$ e dunque $y_1 + y_2 \in A(X)$. D'altronde, $A(\lambda x_1) = \lambda A(x_1) = \lambda y_1$ e dunque da $y_1 \in A(X)$ segue $\lambda y_1 \in A(X)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ ($o \in \mathbb{C}$), da cui $A(X)$ è un sottoinsieme di Y chiuso per la somma e il prodotto per uno scalare, ed è dunque un sottospazio.

Un'interessante proprietà del nucleo è espressa dal seguente

LEMMA Sia $A: X \to Y$, lineare. Allora A è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$.

Dim.

CN (se A è iniettiva $\Rightarrow \mathrm{Ker}\, A = \{0\}$). Poiché $A(0)=0$, essendo A iniettiva, la controimmagine di 0 (e cioè $\mathrm{Ker}\, A$) contiene solo 0.

CS (se $\mathrm{Ker}\, A = \{0\} \Rightarrow A$ è iniettiva) Siano $x, y \in X$ tali che $A(x) = A(y)$, e proviamo che $x = y$. Dalla linearità segue

$$0 = A(x) - A(y) = A(x-y)$$

e dunque $x - y \in \mathrm{Ker}\, A$. Poiché $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, si ha $x - y = 0$ e dunque $x = y$.

APPLICAZIONI LINEARI SU UNO SPAZIO DI DIMENSIONE FINITA

In tutta questa sezione supporremo sempre che $A: X \to Y$ sia lineare e che X sia di dimensione finita. Nessuna ipotesi verrà assunta su Y.
Il primo risultato esposto riguarda le controimmagini di un sistema di vettori indipendenti.

LEMMA Siano $y_1, y_2, \dots, y_k$ vettori linearmente indipendenti in Y, e siano $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ tali che $A(x_i) = y_i$ $i=1..k$, ossia siano $x_i \in A^{-1}(y_i)$. Allora $x_1 \dots x_k$ sono indipendenti.

Dim. Siano $\alpha_1 \dots \alpha_k$ tali che $\sum_{j=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$ e proviamo che $\alpha_i = 0$ $\forall i = 1..k$. Infatti
$$\sum_1^k \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = A(0) = A\left(\sum_1^k \alpha_i x_i\right) = \sum_1^k \alpha_i A(x_i) = \sum_1^k \alpha_i y_i$$
Essendo $y_1, y_2, \dots y_k$ indipendenti, ne segue $\alpha_i = 0$ $\forall i = 1..k$.

Una conseguenza del lemma precedente è il

TEOREMA Sia $A: X \to Y$, lineare, con $\dim X$ finita. Allora lo spazio $A(X)$ è di dimensione finita e inoltre
$$\dim A(X) \leq \dim X .$$

Dim. Se così non fosse $A(X)$ sarebbe o di dimensione infinita, e in tal caso conterrebbe un numero arbitrariamente alto di vettori indipendenti, oppure di dimensione finita strettamente maggiore di $n = \dim X$. In entrambi i casi $A(X)$ conterrebbe almeno $n+1$ vettori indipendenti, $y_1, y_2, \dots y_{n+1}$. Per il lemma precedente, scelti ad arbitrio i vettori $x_1 \dots x_{n+1}$ in modo che $x_i \in A^{-1}(y_i)$, $x_1 \dots x_{n+1} \in X$ risulterebbero indipendenti, sicché $\dim X \geq n+1$, contro le ipotesi.

Il prossimo è il più importante risultato della sezione.

TEOREMA (Grassmann) <u>Sia $A : X \to Y$, lineare, con</u> X <u>di dimensione finita</u>. <u>Allora</u>

$$\dim X = \dim \operatorname{Ker} A + \dim A(X)$$

<u>Dim.</u> Dal lemma precedente segue subito che $\dim A(X) \leq \dim X = n$. Supporremo inizialmente che $\dim \operatorname{Ker} A \neq 0$ e che $\dim A(X) \neq 0$. Sia $w_1 \dots w_m$ una base dello spazio $\operatorname{Ker} A$ e $y_1 \dots y_k$ una base dello spazio $A(X)$. Occorre provare che $n = m + k$. Siano $x_1 \dots x_k \in X$ tali che $A(x_i) = y_i$ $\forall i = 1..k$. Per il lemma precedente, essendo controimmagini di $y_1 \dots y_k$ che sono indipendenti, essi sono indipendenti. Proveremo che

(1) $\langle x_1 \dots x_k, w_1 \dots w_m \rangle = X$

(2) $x_1, \dots, x_k, w_1, \dots w_m$ sono indipendenti.

da cui seguirà che $x_1, \dots, x_k, w_1, \dots w_m$ formano una base di X e di conseguenza $n = \dim X = k + m$, che è la tesi.

Per provare (1) sia $x \in X$, scelto ad arbitrio. Si ha $A(x) \in A(X)$, ed essendo $y_1 \dots y_k$ una base per $A(X)$, esisteranno $\beta_1 \dots \beta_k$ tali che

$$A(x) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j y_j$$

Si ponga ora $\bar{x} = \sum_1^k \beta_j x_j$. Si ha $A(\bar{x}) = A\left(\sum_1^k \beta_j x_j\right) = \sum_1^k \beta_j A(x_j) =$

$= \sum_{j=1}^{k} \beta_j y_j = A(x)$. Ne segue

$$0 = A(x) - A(\bar{x}) = A(x - \bar{x})$$

e dunque $x - \bar{x} \in \operatorname{Ker} A$. Poiché $w_1 \dots w_m$ è una base di $\operatorname{Ker} A$, esisteranno $\alpha_1 \dots \alpha_m$ tali che

$$x - \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i$$

e infine

$$x = \bar{x} + \sum_{1}^{m} \alpha_i w_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i$$

e cioè

$$x \in \langle x_1, \dots, x_k, w_1, \dots w_m \rangle$$

Per provare ② (l'indipendenza di $x_1, \dots, x_k, w_1 \dots w_m$) siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e $\mu_1, \dots, \mu_m$ tali che

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = 0 \qquad (*)$$

e proveremo che $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$.
Infatti, essendo A lineare, $A(0) = 0$ e dunque, da $(*)$, segue $0 = A\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j\right) + A\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i\right)$. Essendo $\sum_{1}^{m} \mu_i w_i \in \operatorname{Ker} A$, segue

$$A\left(\sum_{1}^{m} \mu_i w_i\right) = 0 \quad \text{da cui} \quad 0 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j A(x_j) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j y_j$$

Essendo poi $y_1 \dots y_k$ indipendenti, segue $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.
Sostituendo in $(*)$ segue ancora

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = 0$$

e, dall'indipendenza di $w_1 \dots w_m$, segue anche $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 0$ e la tesi è provata.

Supponiamo ora $\dim \operatorname{Ker} A = 0$. In tal caso occorre provare che

$$\dim X = \dim A(X)$$

Se $\dim \operatorname{Ker} A = 0$, allora $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.
Si può allora ripetere la dimostrazione precedente osservando che, da $x - \bar{x} \in \operatorname{Ker} A$ segue $x - \bar{x} = 0$, da cui

$$x = \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j$$

e dunque $X = \langle x_1 \dots x_k \rangle$. Dall'indipendenza di $x_1 \dots x_k$ segue che $x_1 \dots x_k$ è una base di X e dunque

$$\dim X = k = \dim A(X)$$

Se poi è $\dim A(X) = 0$, allora $A(X) = \{0\}$, da cui

$$\operatorname{Ker} A = X$$

e dunque

$$\dim X = \dim \operatorname{Ker} A$$

che è la tesi.

COROLLARIO (Invarianza della dimensione)

$A : X \to Y$ è lineare e iniettiva se e solo se

$$\dim X = \dim A(X)$$

Dim. Infatti A è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ e dunque se e solo se $\dim \operatorname{Ker} A = 0$.

Concludiamo la sezione con una generalizzazione del

TEOREMA (di Cramer) Sia $A: X \to Y$ lineare, con X e Y spazi vettoriali di uguale dimensione finita. Allora A è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Dim.

CN (se A è iniettiva allora è suriettiva)

A è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, da cui segue che

$$\dim \mathrm{Ker}\, A = 0$$

Dal teorema di Grassmann ciò accade se e solo se

$$\dim X = \dim A(X)$$

Poiché $\dim Y = \dim X$, ciò equivale infine a

$$\dim Y = \dim A(X)$$

Poiché $A(X)$ è un sottospazio di Y, ciò accade se e solo se $A(X)$ coincide con Y, e cioè se A è suriettiva.

CS. (se A è suriettiva allora è iniettiva)

Infatti se A è suriettiva $A(X) = Y$ e dunque

$$\dim A(X) = \dim Y = \dim X$$

Dal teorema di Grassmann ne segue $\dim \mathrm{Ker}\, A = 0$ e dunque $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ e infine l'iniettività di A.