ALGEBRA LINEARE

ISTRUZIONI PER L'USO.

(I)

Placido Longo

Indice

Introduzione

Le note che seguono sono destinate a fornire un sussidio agli studenti di Ingegneria Informatica dell'Università di Pisa che seguono il mio corso di Algebra Lineare, orientato prevalentemente agli aspetti applicativi.
La prima parte del corso riguarda le tecniche di calcolo la conoscenza delle quali è indispensabile per l'esame, ad esclusione del calcolo con i determinanti e della diagonalizzazione, che verranno trattati a conclusione.
Alcune formule sono evidenziate nel testo con un riquadro. È indispensabile conoscere i fatti ed essere capaci di eseguire correntemente i calcoli in esse indicati. Si suggerisce di esercitarsi ad applicarle, di volta in volta, con numeri, vettori o matrici scelti a caso.
È ugualmente della massima importanza conoscere perfettamente tutte le definizioni.
In margine alle pagine, in carattere piccolo, sono proposte delle questioni di natura teorica legate all'argomento trattato. Molto spesso si tratta solo di verificare la validità di affermazioni fatte nel testo.
Una parte considerevole degli enunciati della teoria degli spazi euclidei è ispirata alla teoria dei vettori geometrici, ed ha a sua volta conseguenze geometriche. Si raccomanda dunque caldamente di studiare queste note non trascurando di fare un disegno ogni volta che sia possibile. La geometria è ben lungi dall'esaurire tutte le applicazioni interessanti dell'Algebra Lineare, ma è di sicuro il miglior aiuto alla comprensione e all'apprendimento.
Una solida conoscenza dell'Algebra Lineare è insostituibile nello studio della Matematica avanzata: già la teoria delle funzioni di più variabili nei corsi universitari d'Analisi Matematica diviene enormente più chiara se esposta con le idee e il linguaggio dei vettori.
Gli albori della moderna Analisi Funzionale, il cui sviluppo è esploso nel corso del XX secolo, hanno visto una trasposizione più o meno identica di fatti già noti nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ agli spazi di dimensione infinita.
Ancora più importante è il suo ruolo sul fronte delle applicazioni: programmi di previsione meteorologica, di calcolo aerodinamico, di simulazione del comportamento di strutture elastiche, di ottimizzazione di reti o di traffico, spesso non fanno altro che trasformare i loro complessi problemi originali nella risoluzione di giganteschi sistemi di equazioni lineari.
Chi abbia conoscenze sufficienti nel campo matematico sa bene quanto sia difficile tracciare una linea di demarcazione fra la Matematica *che serve* e quella che *non serve*, e quanto enormemente questa ipotetica linea si possa spostare nel corso degli anni per effetto della rapidissima crescita della potenza di calcolo disponibile. L'Algebra Lineare è uno degli esempi più illuminanti a tale proposito, con la sua inarrestabile trasformazione da ostica teoria astratta piena

di determinanti virtualmente impossibili da calcolare anche per matrici di dimensioni tutto sommato assai modeste, ad insostituibile strumento applicativo la cui utilità pratica è oggi di tutta evidenza, visto che su qualunque portatile girano programmi di calcolo algebrico molto potenti, a loro volta assai spesso infarciti delle analisi teoriche e dei risultati più raffinati e recenti.

Pisa, 16 Marzo 2009.

Placido Longo

Capitolo 1

Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

PREREQUISITI:
Geometria euclidea: teoremi di Pitagora e di Talete. Criteri di eguaglianza per i triangoli. Bisettrice di un angolo.
Vettori geometrici: modulo, direzione e verso. Multiplo. Somma e regola del parallelogramma. Opposto, differenza e regola del triangolo.
Trigonometria elementare: definizione di arco, seno e coseno. Relazioni trigonometriche fra gli elementi di un triangolo rettangolo. Seno e coseno di somme e differenze di archi. Formule di duplicazione.

La necessità di poter disporre di modelli per lo stato di sistemi complessi, che integrano le misure di decine o centinaia di sensori — ad esempio un sistema esperto per la gestione di una mano artificiale o per il controllo automatico di un aeroplano — ma anche di quelli più semplici come le coordinate cartesiane di un punto nel piano o nello spazio o le coordinate geografiche di un punto sulla superficie terrestre, inducono ad approfondire lo studio degli oggetti costituiti da più numeri reali. In questo capitolo verranno introdotti gli strumenti fondamentali per tale studio, e se ne vedranno le prime applicazioni alla geometria.

1.1 L'insieme $\mathbb{R}^n$

Per prima cosa verranno definiti $\mathbb{R}^n$ e i suoi concetti di base.

1.1.1 Vettori, componenti, uguaglianza

Definizione 1 *Fissato un generico intero n, si denoterà con $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali.*
L'intero n (per ragioni che diverranno chiare in seguito) si dirà dimensione *di $\mathbb{R}^n$.*

I loro elementi, a causa degli strettissimi legami fra $\mathbb{R}^2$ ed il piano da una parte, e fra $\mathbb{R}^3$ e lo spazio dall'altra, si chiamano anche *punti* o *vettori*.
La differenza fondamentale con la teoria classica dei vettori geometrici è che essa definisce un vettore a partire da una coppia ordinata di punti, uno dei quali (il primo, ad esempio) è il punto d'applicazione del vettore e l'altro definisce la direzione, il verso e la lunghezza del vettore. Nello studio di $\mathbb{R}^n$ si assume invece che il punto d'applicazione sia sempre l'origine, e dunque si identificherà

il vettore col suo estremo "libero". In simboli:

$$\boxed{\mathbb{R}^n \qquad \equiv \qquad \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}}$$

Definizione 2 *Dato $x \in \mathbb{R}^n$, con $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, il numero reale x_i è detto i-esima componente del vettore x.*

Definizione 3 *Si dirà che due vettori in $\mathbb{R}^n$ sono uguali se e solo se hanno le componenti corrispondenti uguali.*

In simboli:

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x = y \qquad \equiv \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \qquad x_i = y_i}$$

Esempi 1 *Essendo $\mathbb{R}^1 = \{(x) : x \in \mathbb{R}\}$ è uso comune di identificare $\mathbb{R}^1$ con $\mathbb{R}$.*
Le coppie $(1, 0), (\frac{2}{3}, 1), (\pi, \sqrt{3})$ sono esempi di elementi di $\mathbb{R}^2$.
Le coppie $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono due elementi distinti *di $\mathbb{R}^2$.*
I numeri 1, 0, e 3 sono rispettivamente la prima, la seconda, e la terza componente del vettore $(1, 0, 3) \in \mathbb{R}^3$.

La relazione di eguaglianza fra vettori eredita immediatamente da $\mathbb{R}$ le fondamentali proprietà di riflessività ($u = u$), simmetria ($u = v \Rightarrow v = u$), e transitività ($u = v, v = w \Rightarrow u = w$): è dunque una relazione d'equivalenza.

Verificarlo!

Dato un elemento in $\mathbb{R}^2$, interpetrando i termini della coppia che lo costituisce come le coordinate di un punto del piano (cartesiane, polari o di altro tipo, rispetto ad un riferimento prefissato) e viceversa, si stabilisce una corrispondenza fra $\mathbb{R}^2$ e il piano, che varia al variare del sistema di coordinate prescelto. In tal senso, si può considerare $\mathbb{R}^2$ come un modello aritmetico del piano. Analogamente si può ragionare per $\mathbb{R}^3$ e lo spazio.

1.2 La struttura algebrica di $\mathbb{R}^n$

Utilizzando il teorema di Talete e i criteri di uguaglianza dei triangoli, verificare che la somma e il multiplo qui definiti coincidono con quelli definiti per i vettori geometrici.

Le due operazioni caratteristiche dei vettori geometrici, il multiplo e la somma (o risultante), suggeriscono le definizioni delle due operazioni fondamentali in $\mathbb{R}^n$, che ereditano gran parte delle proprietà della somma e del prodotto in $\mathbb{R}$.

1.2.1 La somma di vettori

Definizione 4 *Dati due punti in $\mathbb{R}^n$, si definisce la loro* somma *come il vettore che ha per componenti la somma delle loro componenti corrispondenti.*

In simboli:

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x + y \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)}$$

L'operazione di somma di due vettori appartenenti allo stesso spazio euclideo equivale ad eseguire simultaneamente le somme di tutte le componenti corrispondenti. Non è definita la somma fra vettori appartenenti a spazi di dimensione diversa.

1.2.2 Gli scalari e il loro prodotto coi vettori

Definizione 5 *Dati un punto di* $\mathbb{R}^n$ *e un numero reale, si definisce il suo* multiplo secondo il numero *come il vettore che ha per componenti i prodotti del numero per le componenti iniziali del punto. Il multiplo verrà anche detto* prodotto del numero per il vettore.

In simboli:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda\, x \quad \equiv \quad (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, ..., \lambda\, x_n)}$$

Le notazioni λx e $x\lambda$ verranno considerate identiche.
Seguendo il linguaggio tradizionale della teoria dei vettori, i numeri vengono (anche) chiamati *scalari*. L'operazione di prendere il multiplo di un vettore secondo un numero viene detta più comunemente *prodotto dello scalare per il vettore*, ed equivale ad eseguire simultaneamente il prodotto fra lo scalare e tutte le componenti del vettore.

1.2.3 Il vettore nullo

Lo zero, in tutti gli insiemi numerici, gode della proprietà di non alterare alcun numero al quale venga sommato. Una proprietà simile è goduta, in $\mathbb{R}^n$, dal vettore $(0, 0, ..., 0)$. Infatti, ogni componente del vettore somma sarà ottenuta dal valore iniziale della componente addizionandovi 0, e resta dunque inalterata.
Ciò suggerisce la

Definizione 6 *In ogni spazio* $\mathbb{R}^n$*, si denoterà con* 0 *il vettore che ha tutte le componenti nulle. Verrà anche detto* vettore nullo.

Non si ravvisa mai la necessità di distinguere i (diversi) vettori nulli relativi ai vari spazi $\mathbb{R}^n$. Non verrà dunque mai apposto un indice n allo zero.
Sarà invece della massima importanza, nel seguito, di distinguere lo zero scalare da quello vettore, e poiché le notazioni sono identiche sarà cura esclusiva del lettore il farlo.

1.2.4 L'opposto e la differenza

Una volta individuato lo zero, si può cercare di definire l'opposto di un numero dato come quel numero che sommato ad esso dà zero. La differenza si definisce poi di conseguenza. Dunque

Definizione 7 *Dato un vettore* u *in* $\mathbb{R}^n$ *si definisce il suo* opposto *come il vettore ottenuto da esso cambiandone di segno tutte le componenti. Verrà denotato col simbolo* $-u$.

Definizione 8 *La differenza* $u - v$ *fra due vettori* u *e* v *di* $\mathbb{R}^n$*, presi in ordine, è definita come la somma del primo con l'opposto del secondo*

In simboli:

$$\boxed{-u \quad \equiv \quad (-u_1, -u_2, ..., -u_n)}$$

e

$$\boxed{u - v \equiv u + (-v) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_n - v_n)}$$

La definizione di opposto è giustificata dal fatto che

$$(u_1 + (-u)_1, u_2 + (-u)_2, ..., u_n + (-u)_n) = 0$$

Gli zeri che appaiono nelle formule precedenti sono scalari o vettori?

e dunque $u + (-u) = 0$.

Nel seguito risulterà di tutta evidenza che uno dei maggiori punti di forza dell'algebra lineare nelle sue applicazioni consiste nell'estrema sintesi che consente nella scrittura. La sua efficacia è però strettamente legata alla capacità dell'utilizzatore di "leggere" correntemente tale stenografia. Agli scalari ed ai vettori si aggiungeranno le matrici, al prodotto di scalari ed a quello di uno scalare per un vettore si aggiungeranno il prodotto scalare di vettori e quello di matrici per vettori e per altre matrici ... il tutto senza nominare neppure i tensori. La notazione più esplicita, che indica per esteso tutte le operazioni sulle componenti, è anche la meno agile, e conviene usarla solo quando è indispensabile. Le notazioni più sintetiche lasciano all'utente una parte o tutto il carico di cogliere pienamente il significato di quanto scritto. Il suggerimento evidente è di chiedersi di continuo, soprattutto nelle fasi di apprendimento iniziali, se gli oggetti scritti siano scalari o vettori!

1.2.5 Gli assiomi

Le operazioni ora introdotte su $\mathbb{R}^n$ ereditano direttamente da $\mathbb{R}$ le seguenti proprietà :

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x + y = y + x$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
6. $\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad 1x = x$
7. $\exists y \in \mathbb{R}^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad y + x = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \exists y \in \mathbb{R}^n : \qquad y + x = 0$

La dimostrazione di tutte queste uguaglianze può essere ottenuta calcolando separatamente le componenti dei vettori al primo e al secondo membro, e riconoscendo che sono uguali. A titolo d'esempio, dimostriamo la prima.

Verificare anche le altre.

Il primo membro, scritto in forma scalare, è

$$(x_1+(y+z)_1, x_2+(y+z)_2, ..., x_n+(y+z)_n) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, ..., x_n+y_n+z_n)$$

Il secondo membro è

$$((x+y)_1+z_1, (x+y)_2+z_2, ..., (x+y)_n+z_n) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, ..., x_n+y_n+z_n)$$

e risulta uguale al primo membro.
Le proprietà più su elencate sono talmente radicate nella nostra cultura ("Invertendo l'ordine degli addendi la somma non cambia") da indurre il lettore a sorvolare. È invece opportuno soffermarsi sul significato che tali proprietà rivestono nell'algebra in generale e nell'algebra dei vettori in particolare.
La proprietà 1) è detta *proprietà associativa*: il valore della somma di più termini non dipende dal modo con cui essi vengono accoppiati per sommarli. Tale proprietà consente di indicare la somma, ad esempio, di tre termini x, y, z con il simbolo $x + y + z$ senza necessità di alcuna parentesi. Operazioni elementari fra numeri molto note sin dall'infanzia non godono della proprietà associativa. Quali sono?
La proprietà 2), più su ricordata, è detta *proprietà commutativa*: il valore della somma di due termini non dipende dall'ordine degli addendi.
Le due proprietà precedenti insieme permettono di riordinare una somma di vettori come si vuole, e di eseguire la somma raggruppandoli come si vuole.
Le proprietà 3) e 4) derivano direttamente dalla *proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*: in sostanza, si può raccogliere in evidenza sia un vettore sia uno scalare in una somma di multipli.
La proprietà 5) deriva direttamente dalla *proprietà associativa del prodotto* e la estende, in qualche modo, al prodotto di scalari per vettori.
Le proprietà 6) e 7) e 8) sono "evidenti" (le ultime due riguardano lo zero e l'opposto prima introdotti), ma in effetti sarà necessario richiederle come requisito d'ingresso se si vogliono definire spazi di vettori diversi da $\mathbb{R}^n$ o dal suo "omologo" complesso $\mathbb{C}^n$, che verrà presentato più avanti, per i quali lo zero e l'opposto sono elementarmente definiti.

I polinomi sono uno spazio vettoriale? E i polinomi di secondo grado? E quelli di grado minore o uguale a tre? E le funzioni definite su uno stesso insieme? E le funzioni limitate? E le funzioni continue in un punto? E quelle discontinue in un punto? E le funzioni positive? E le funzioni in modulo minori di uno? E le funzioni derivabili? E le funzioni integrabili? E le funzioni divergenti in un punto? E quelle convergenti in un punto? E quelle che a $+\infty$ divergono a $+\infty$?

A questo proposito, si osservi che le proprietà più su presentate sono quelle caratteristiche di qualunque sistema di oggetti che voglia essere considerato un insieme di vettori. Con riserva di un più approfondito esame nel seguito, anticipiamo che un insieme generico, per esempio di funzioni o di polinomi o di altro ancora, si dirà *spazio vettoriale (o lineare)* se su di esso sono definite somma, multiplo scalare, opposto e si può individuare un elemento speciale (lo zero), verificanti tutte le proprietà della precedente lista, che ne costituiscono *gli assiomi*.

Nel capitolo sui sistemi lineari, inoltre, verrà mostrato come il complesso di tali proprietà permetta di manipolare le equazioni vettoriali (quasi) esattamente nel modo imparato a scuola per quelle algebriche, e come esso costituisca il cuore dell'algebra elementare.

Nella terminologia dell'algebra astratta, un insieme arbitrario sul quale sia definita un'operazione che associ ad ogni coppia di suoi elementi uno ed un solo suo elemento, la loro *somma*, in modo che siano verificate le proprietà 1),7) e 8) viene detto un *gruppo (additivo)*; il gruppo viene poi detto *abeliano (o commutativo)* se la somma verifica anche la 2).

1.2.6 Altre proprietà

Accanto alle proprietà elencate in precedenza ve ne sono numerose altre, ad esse conseguenti. Ad esempio:

Lo zero è scalare o vettore?

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad 0x = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (-1)x = -x$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad -(x+y) = -x - y$

Possono tutte essere provate direttamente, come è stato visto per gli assiomi. Seguiremo però una linea di ragionamento differente: dedurle dagli assiomi stessi.

Per dimostrare la 1), si osservi che $x + 0x = 1x + 0x = (1 + 0)x = 1x = x$ e cioè $x + 0x = x$; sommando ad ambo i membri $-x$ ne segue la tesi.

Per dimostrare la 2), si osservi prima che il primo membro è il prodotto dello scalare -1 per il vettore x, mentre il secondo è il vettore che sommato a x dà 0, e non è *a priori* evidente che coincidano. Risulta però $(-1)x + x = (-1)x+1x = [(-1)+1]x = 0x = 0$. Dunque, $(-1)x$ sommato a x dà 0 e dunque è il suo opposto.

Per dimostrare la 3), basta applicare ripetutamente la 2) e la proprietà distributiva.

Farlo!

Poiché le dimostrazioni precedenti non fanno in alcun modo uso della definizione di $\mathbb{R}^n$, ma solo delle proprietà assiomatiche presentate più su, esse saranno dunque valide in qualsiasi spazio vettoriale, che le verifica per definizione.

1.3 La struttura metrica di $\mathbb{R}^n$

Accanto alla struttura lineare, $\mathbb{R}^n$ possiede una struttura metrica, che consente di attribuire una lunghezza ai propri vettori e una distanza relativa alle coppie dei propri punti.

1.3.1 La norma

In questa sezione viene introdotta la *norma* di un vettore, detta anche *modulo* o *lunghezza*, e ne vengono studiate le proprietà.

La definizione L'interpetrazione delle due componenti di un vettore di $\mathbb{R}^2$ come coordinate cartesiane di un punto suggerisce di impiegare il teorema di Pitagora per esprimere la lunghezza del vettore come la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti. Anche in $\mathbb{R}^3$ si può applicare ripetutamente il teorema di Pitagora, proiettando di volta in volta nella direzione di uno degli assi coordinati, per ottenere lo stesso resultato. Ne segue la

Dimostrare che il quadrato della diagonale di un parallelepipedo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati degli spigoli.

Definizione 9 *Dato un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ si definisce* norma*, o* modulo *o* lunghezza*, di u il numero $|u|$ che si ottiene sommandone i quadrati delle sue componenti ed estraendo la radice quadrata del resultato.*

In simboli:

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \qquad |u| \quad \equiv \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

1.3.2 Gli assiomi

La norma risulta definita per ogni vettore di $\mathbb{R}^n$, e gode delle seguenti proprietà caratteristiche:

1.	$\forall x \in \mathbb{R}^n$	$\lvert x\rvert \geq 0$	
2.	$\lvert x\rvert = 0$	$\Leftrightarrow$	$x = 0$
3.	$\forall x \in \mathbb{R}^n$	$\forall \lambda \in \mathbb{R}$	$\lvert\lambda x\rvert = \lvert\lambda\rvert\lvert x\rvert$
4.	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	

La 1) è immediata, essendo la radice positiva quando è definita, com'è nel nostro caso.
La 2) richiede la verifica di entrambe le implicazioni nei due versi. Se $x = 0$, allora tutte le sue componenti sono nulle, e tali sono la somma dei loro quadrati e la radice. Viceversa, se $|x| = 0$ allora da $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 0$ segue subito $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ e poiché tutti i termini sono non negativi, ancora che ogni addendo è nullo: dunque tutti i quadrati delle componenti, e di conseguenza anche le componenti, sono nulli. Il vettore, avendo tutte le componenti nulle, è nullo.
La 3), viene detta anche proprietà di *omogeneità* (o di positiva omogeneità, per massimo rigore). Si ha:

$$|\lambda x| = \sqrt{(\lambda x)_1^2 + (\lambda x)_2^2 + \cdots + (\lambda x)_n^2} = \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} = |\lambda||x|$$

La 4) è detta disuguaglianza triangolare: ricordando che il vettore somma è la diagonale del parallelogramma avente per lati i due addendi della somma, la disuguaglianza dice, in simboli, che nel triangolo i cui lati hanno lunghezze $|x|, |y|$ il terzo lato $x + y$ ha lunghezza minore o eguale alla loro somma. Nonostante la proprietà fosse ben nota anche nell'antichità, almeno nel piano e nello spazio, la prova diretta per via analitica è insospettabilmente complessa e bisognerà attendere l'ultima sezione di questo capitolo, e gli strumenti sviluppati prima di essa, per vederla completata. Per ora ci limitiamo ad enunciarla senza dimostrazione.

La lettura attenta delle proprietà precedenti costituisce un eccellente esercizio : il simbolo 0 denota lo zero scalare e il vettore nullo, così come il simbolo $|\ |$ che, a seconda del suo argomento, denota il valore assoluto per i reali o la norma per i vettori. È essenziale sottoporsi a tale esercizio, per sviluppare la capacità di discriminare i significati aldilà delle notazioni.

Farlo!

Uno spazio vettoriale sul quale sia ovunque definita una funzione verificante le condizioni precedenti, viene detto *normato* e la funzione viene detta *norma*. Gli spazi normati astratti, come quelli metrici e quelli euclidei saranno oggetto di più approfondite indagini in seguito.

Si definisca in $\mathbb{R}^n$ una funzione ponendo $||u|| = \max_{i=1..n} |u_i|$. Può essere presa come una nuova norma in $\mathbb{R}^n$?

Analoga domanda con $|||u||| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.

Si può definire una norma sullo spazio delle funzioni continue in $[0,1]$ ponendo $||u|| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|$?

Stessa domanda per la funzione $|||u||| = \max_{t \in [0,1]} u(t)$.

La funzione $||u|| = \sup_{]0,1[} |u(t)|$ definisce una norma nello spazio delle funzioni continue su $]0,1[$ (aperto)?

La funzione $\int_0^1 |u(t)|\, dt$ definisce una norma sullo spazio delle funzioni continue su $[0,1]$? E su quello delle funzioni integrabili?

Gli assiomi di spazio normato, così come quelli di spazio vettoriale, sono stati (almeno in parte) *dimostrati* per $\mathbb{R}^n$. Ciò sembra contraddire alcune malaccorte "definizioni" di assioma come di una proposizione che si accetta senza dimostrazione, confermando ulteriormente (come se ce ne fosse bisogno!) l'alone di dogmatismo antipatico che circonda la Matematica. I fatti sono che, da Euclide in poi, gli assiomi non sono dogmi, ma proprietà costitutive degli oggetti sotto indagine (fossero anche tavoli e boccali di birra, come ebbe a dire ai suoi allievi il grande matematico e logico David Hilbert). Se si vuole studiare la geometria della superficie della sfera, ad esempio per determinare le rotte più brevi per le proprie navi, non si può inserire fra gli assiomi il postulato della parallela ("Per ogni punto si può condurre una e una sola parallela ad ogni retta data") perché è falso se si dà una definizione sensata di retta sulla sfera. La geometria delle superficie e dello spazio curvi, dagli studi settecenteschi di trigonometria sferica, attraverso le pietre miliari poste da Gauss che arrivò a misurare gli angoli interni di un triangolo formato da tre cime di monti per vedere se differiva da un angolo piatto, come sarebbe accaduto in presenza di curvatura dello spazio, fino alle misure astronomiche della deviazione della luce attorno al sole che confermarono la curvatura dello spazio indotta dalla gravità, prevista dalla teoria della Relatività Generale, mostra con tutta evidenza che diversi sistemi d'assiomi producono teorie diverse, ciascuna delle quali può essere la più utile in un appropriato contesto. Il vantaggio "pratico" del metodo assiomatico è di permettere di fare la fatica una sola volta in quanto le conseguenze dirette degli assiomi (e solo di essi) sono allora automaticamente verificate qualunque sia il "modello" della teoria che si considera; per questo abbiamo spesso privilegiato la deduzione dagli assiomi anche quando era evidentemente meno rapida delle prove dirette. Per decidere se un insieme di oggetti "concreti" è un modello della teoria occorre però verificare per esso la validità degli assiomi. Ciascuno ha la libertà di elencare gli assiomi che vuole e assumerli come caratteristici di una struttura matematica che può decidere di chiamare *spazio vettoriale*, e ha anche tutta la libertà di definire $\mathbb{R}^n$ come vuole, ma per dire che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale ha l'obbligo di verificare che tutte le proprietà "connaturate" al concetto di spazio vettoriale, che egli ha prima elencato nel proprio sistema di assiomi, valgano per la propria "versione" di $\mathbb{R}^n$. Ciò, seppur brevemente, è stato fatto.
A titolo di curiosità, è bene sapere che per dimostrare che un sistema di assiomi è non contradditorio — problema fondamentale in logica — se ne costruisce un modello, cioè un oggetto "reale" che li verifichi tutti.
Chi avesse in mente che per costruire un sistema sensato di assiomi basti pontificare *ex cathedra* è completamente fuori strada: occorre riflettere tantissimo!!! Il sistema di assiomi più antico, studiato e idolatrato del pensiero umano, quello di Euclide, è stato dalla sua nascita vivisezionato senza soluzione di continuità, ed ha mostrato una "falla" nella seconda metà dell'Ottocento, quando Moritz Pasch scoprì una proprietà "evidente" usata da Euclide, ma "indipendente" dai suoi assiomi, e cioè non dimostrabile a partire da essi. *Grosso modo*, essa asserisce che se una retta entra in un triangolo deve pure uscirne (ricercare su internet "axiom Pasch" per un enunciato corretto). Hilbert, Peano, Tarskij, Birkoff, Kolmogorov, Dieudonné ed altri ancora, gettarono piena luce sull'impianto logico della Geometria Euclidea solo nel secolo scorso!

1.3.3 Le proprietà

Una conseguenza immediata della disegualianza triangolare (non ancora provata) è la seguente

Sono norme o valori assoluti?

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \big|\, |x| - |y| \,\big| \;\leq\; |x - y|}$$

Per verificarla, osserviamo che dall'omogeneità della norma segue subito $|-x| = |x|$, e dunque la tesi equivale al sistema delle due diseguaglianze

$$\begin{cases} |x| - |y| \;\leq\; |x - y| \\ |y| - |x| \;\leq\; |y - x| \end{cases}$$

Esse seguono immediatamente dalla diseguaglianza triangolare applicata alle terne di vettori $x - y, y, x$ per la prima e $y - x, x, y$ per la seconda.

Mostrarlo!

1.3.4 I versori

Dato un vettore non nullo, è talvolta molto comodo il poter disporre di un vettore che abbia la stessa direzione e verso, ma norma unitaria. Il problema non ha senso per il vettore nullo, ed è di semplice soluzione per tutti gli altri.

Perché non ha senso per il vettore nullo?

Definizione 10 *Dato un vettore $u \in \mathbb{R}^n$, e supposto $u \neq 0$, si definisce* versore *di u il vettore ottenuto considerandone il multiplo secondo il reciproco della sua norma, ossia $\frac{1}{|u|}u$.*

Dato u non nullo, scrivere i suoi multipli di norma assegnata M.

Scrivere l'espressione vettoriale della forza di attrazione newtoniana fra una massa M nell'origine e una m nel punto x.

Non è di uso corrente un simbolo speciale per il versore di un vettore u, perché è facilissimo e comodo denotarlo semplicemente $\frac{u}{|u|}$. La notazione usata nella definizione è forse più corretta, ma è evidente che non si corre alcun rischio nell'adottare quella più sintetica.
Resta solo da verificare che il versore ha norma 1. Infatti, dall'omogeneità segue subito $|\frac{1}{|u|}u| \;=\; |\frac{1}{|u|}||u| = 1$.

1.3.5 La distanza in $\mathbb{R}^n$

Al concetto di norma or ora introdotto è strettamente collegato quello di *distanza.* In questa sezione verranno esaminate le proprietà fondamentali di tale concetto, che costituirà lo strumento centrale per lo studio dell'Analisi delle funzioni di più variabili.

Dalla regola del triangolo per la differenza di due vettori segue subito che la distanza fra gli estremi di due vettori applicati all'origine, nel piano o nello spazio, è la lunghezza del vettore differenza. Ciò suggerisce di introdurre la seguente definizione:

Definizione 11 *Dati due vettori u e v in $\mathbb{R}^n$, si definisce la loro* distanza (euclidea) $d(u, v)$ *come la norma del loro vettore differenza, e cioè la radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze delle loro coordinate corrispondenti.*

In simboli:

$$\boxed{\forall u, v \in \mathbb{R}^n \qquad d(u, v) \quad \equiv \quad |u - v| \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}}$$

1.3.6 Gli assiomi

La distanza euclidea risulta definita per ogni coppia di punti di $\mathbb{R}^n$. Inoltre, dalle proprietà della norma, discendono immediatamente le seguenti

1. $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$	$d(u, v) \geq 0$		
2. $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$	$d(u, v) = 0$	$\Leftrightarrow$	$u = v$
3. $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$	$d(u, v) = d(v, u)$		
4. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$	$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$		

Le prime due seguono immediatamente dalle corrispondenti della norma. La terza segue dall'omogeneità della norma. L'ultima è la disuguaglianza triangolare così come ci è stata tramandata dalla geometria greca: "In un triangolo (uvw) un lato è minore o eguale alla somma degli altri due".

Verificare questi fatti.

La differenza sostanziale fra i concetti di norma e di distanza risiede nel fatto che quest'ultima non è collegata in alcun modo alla struttura lineare dello spazio, come si vede dal fatto che negli assiomi non appaiono né somme né multipli, e può dunque essere utilizzata anche in quei casi ove gli insiemi da studiare non siano spazi vettoriali, ma solo insiemi.
Nella definizione di continuità o di convergenza, ad esempio, interviene solo il concetto di distanza, ed entrambe riguardano il comportamento della funzione in vicinanza di un punto, senza che sia in alcun modo necessario che il dominio contenga, ad esempio, tutti i multipli anche lontanissimi di tale elemento, come dovrebbe fare se fosse uno spazio vettoriale.

1.3.7 La sfera

Il possedere un concetto di distanza consente immediatamente di estendere ad $\mathbb{R}^n$ i familiari concetti di intervallo in $\mathbb{R}^1$, di cerchio in $\mathbb{R}^2$ e di sfera in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 12 *Dati un punto $u_0 \in \mathbb{R}^n$ e un numero reale $\delta > 0$ si definisce* sfera di centro u_0 e raggio δ *l'insieme degli elementi di $\mathbb{R}^n$ che hanno distanza da u_0 uguale a δ, e si denota col simbolo*

$$S(u_0, \delta)$$

In simboli:

$$\boxed{\forall u_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \delta \in \mathbb{R} \qquad S(u_0, \delta) \;\equiv\; \{v \in \mathbb{R}^n : d(u_0, v) = \delta\}}$$

Nei paesi di lingua anglosassone si usa il termine *ball* (palla), per denotare l'insieme dei punti interni alla sfera, aggiungendo l'aggettivo *aperta* se si escludono i punti della sfera e si includono solo quelli interni, o l'aggettivo *chiusa* se si includono anche i punti del bordo. Il nome *palla* ha avuto poco successo in Italia, e come conseguenza si usa spesso il termine sfera tanto per il solo bordo quanto per la sfera piena, differenziando dal contesto i due significati. In sostanza:

$$\boxed{B(u_0, \delta) \;\equiv\; \{v \in \mathbb{R}^n : d(u_0, v) < \delta\}}$$

è la sfera aperta di centro u_0 e raggio δ,

$$\boxed{\overline{B}(u_0, \delta) \;\equiv\; \{v \in \mathbb{R}^n : d(u_0, v) \leq \delta\}}$$

è la sfera chiusa, mentre

$$\boxed{S(u_0, \delta) \;\equiv\; \{v \in \mathbb{R}^n : d(u_0, v) = \delta\}}$$

è la sfera di centro u_0 e raggio δ, quella di Euclide. Come si vede il nome *ball* sopravvive solo nel simbolo B che verrà usato per le sfere "piene".

Sostituendo agli intervalli le sfere, si possono estendere senza fatica all'Analisi delle funzioni di più variabili i concetti già sviluppati per quelle di una variabile. A titolo d'esempio, in vista di futuri approfondimenti, possiamo definire *limitato* un insieme che è contenuto in una sfera oppure, data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dirla *continua* in x se

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n \qquad |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$$

La definizione è formalmente identica a quella per le funzioni scalari, con l'unica cura in più di distinguere la distanza $|y - x|$, che è valutata in $\mathbb{R}^n$, da quella $|f(y) - f(x)|$, che invece lo è in $\mathbb{R}^m$.

1.4 La struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$

Alla norma e alla distanza in $\mathbb{R}^n$ è strettamente legata un'altra struttura, che formalizza il concetto intuitivo di perpendicolarità. Essa è al cuore della geometria classica, e per tale ruolo centrale viene detta *struttura euclidea*. Ci permetterà di compiere i passi decisivi per dimostrare la disuguaglianza triangolare, finora solo enunciata.
Per prima cosa verrà espresso in funzione delle loro componenti il coseno dell'angolo formato da due vettori e, per meglio illustrare il ragionamento, verranno dapprima considerati solo versori, iniziando dal piano e passando poi allo spazio. Ciò fornirà gli strumenti necessari per tutto il resto dello studio: ad esempio, se il coseno è zero, i vettori saranno perpendicolari!

1.4.1 Il coseno dell'angolo fra versori in $\mathbb{R}^2$

Consideriamo due versori nel piano, u e v. Poiché i loro estremi giacciono sulla circonferenza unitaria, esisteranno due angoli ϕ e θ tali che $u = (\cos\phi, \sin\phi)$ e $v = (\cos\theta, \sin\theta)$.
Dalla trigonometria classica si sa che $\cos(\phi - \theta) = \cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta$ e dunque, espresso nelle coordinate cartesiane di u e v, il coseno dell'angolo $\phi - \theta$ compreso fra u e v vale

$$u_1v_1 + u_2v_2$$

1.4.2 Il coseno dell'angolo fra versori in $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$, il legame fra le funzioni trigonometriche degli angoli e le coordinate cartesiane è molto meno evidente, ma si può arrivare allo stesso resultato per altra via. Si consideri il piano per l'origine e gli estremi dei due versori u e v: essi giaceranno su di una circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. La corda di tale circonferenza da essi determinata è lunga $|u - v|$. Detto ora ψ l'angolo (minore o uguale ad un angolo piatto) da essi formato, se ne consideri la bisettrice, che taglia ortogonalmente a metà anche la corda suddetta. Dalla definizione del seno segue subito che

Verificare.

$$\sin \frac{\psi}{2} \; = \; \frac{|u - v|}{2}$$

È così importante preoccuparsi di orientare ψ per decidere il segno del seno?

e dalla formula di duplicazione del coseno, segue

$$\cos \psi \; = \; 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \; = \; 1 - \frac{1}{2}|u - v|^2 \; =$$

$$= \; 1 - \frac{1}{2}[(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2] \; = \; 1 - \frac{1}{2}[|u|^2 + |v|^2 - 2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)] \; =$$

(essendo u e v versori)

$$= \; 1 - \frac{1}{2}[2 - 2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)] \; = \; u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Questo ragionamento potrebbe essere esteso addirittura ad $\mathbb{R}^n$, chiarendo il rapporto fra la sua distanza e quella in un piano per tre punti in esso immerso, ma quanto fatto è sufficiente per il nostro scopo di motivare la scelta che stiamo per fare a proposito del prodotto scalare. Per ora limitiamoci ad introdurre la scrittura abbreviata

$$uv \; \equiv \; u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

1.4.3 Il caso dei vettori non unitari in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

Cosa fare nel caso di vettori di lunghezza arbitraria? Se una di esse è nulla l'angolo non è definito; se invece sono entrambi non nulli, basta osservare che angolo e coseno non cambiano se si sostituiscono i vettori originali u e v con i loro versori $u/|u|$ e $v/|v|$, e dunque il coseno dell'angolo (uno qualunque dei due) formato da essi vale

Eseguire il calcolo.

$$\frac{uv}{|u||v|}$$

1.4.4 Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$

In fisica, la definizione del lavoro compiuto da una forza comporta la determinazione della componente della forza nella direzione dello spostamento, il che conduce alla definizione di prodotto scalare di due vettori.
Prima di dare tutti i dettagli su come funzioni il meccanismo della proiezione, limitiamoci a ricordare che, in fisica, il prodotto scalare è definito come uno *scalare* ottenuto moltiplicando i moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo da essi formato. Moltiplicando l'ultima espressione per il prodotto dei moduli $|u||v|$ si scopre che il prodotto scalare è esattamente il valore che abbiamo indicato con uv.

1.4.5 Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

In questa sezione viene introdotto il prodotto scalare: il concetto più importante negli spazi euclidei.
Sulla base delle osservazioni precedenti, introduciamo la seguente

Definizione 13 *Dati due vettori arbitrari in* $\mathbb{R}^n$*, definiamo il loro* prodotto scalare *(o* prodotto interno*) come lo scalare ottenuto dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti.*

In simboli:

$$\boxed{\forall u, v \in \mathbb{R}^n \qquad uv \quad \equiv \quad u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i}$$

L'espressione "prodotto interno" è infelicissima: nell'algebra moderna una legge di composizione *interna* è una funzione i cui valori appartengono allo stesso insieme di appartenenza degli operandi, e cioè ai vettori, nel nostro caso. Il prodotto scalare è definito per coppie di vettori ma assume valori scalari, e dunque non è, a rigor di termini, un prodotto "interno". Esiste, almeno in $\mathbb{R}^3$, un prodotto di vettori che dà come risultato un vettore, e che è dunque un "vero" prodotto interno, ma si è da sempre chiamato prodotto vettore, o anche *prodotto esterno*: una vera Babele! Anche se funziona perfettamente solo in $\mathbb{R}^3$, il prodotto "esterno" è comunque utile ed interessante, e verrà esaminato fra breve. Ad evitare confusione, però, verranno sempre adoperati i termini prodotto scalare e prodotto vettore, evitando del tutto l'uso dei termini interno ed esterno.
Da quanto accade nello spazio ordinario, scaturisce anche la seguente fondamentale

Definizione 14 *Due vettori in* $\mathbb{R}^n$ *si diranno* ortogonali *se e solo se il loro prodotto scalare vale zero.*

Questa definizione generalizza il fatto che, in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$, il coseno è zero se e solo se è zero uv.

Provare che 0 è ortogonale ad ogni vettore.

Provare che se due vettori sono ortogonali anche loro multipli arbitrari lo sono.

1.4.6 Il coseno dell'angolo in $\mathbb{R}^n$

Definizione 15 *Dati due vettori in* $\mathbb{R}^n$*, si definisce il coseno dell'angolo da essi formato come il rapporto fra il loro prodotto scalare e il prodotto delle loro norme*

In simboli:

$$\boxed{\forall u, v \in \mathbb{R}^n \qquad \cos \widehat{uv} \equiv \frac{uv}{|u||v|}}$$

La definizione adottata è coerente con quanto visto per $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$, ma resta in attesa di essere giustificata in generale, quantomeno perché non è detto che l'espressione usata sia in modulo minore o uguale ad 1; ciò seguirà dalla disuguaglianza di Schwartz, che verrà provata fra breve.

1.4.7 Gli assiomi del prodotto scalare

Il prodotto scalare appena introdotto gode delle seguenti proprietà fondamentali:

1.	$\forall u \in \mathbb{R}^n$	$uu \geq 0$
2.	$uu = 0 \quad \Leftrightarrow$	$u = 0$
3.	$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$	$uv = vu$
4.	$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$(\alpha u + \beta v)w = \alpha uw + \beta vw$

A tali proprietà, che costituiscono gli assiomi per gli spazi euclidei astratti, se ne aggiunge un'altra di pari importanza

Teorema 1

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^n \qquad uu = |u|^2}$$

Essa stabilisce il legame fondamentale fra prodotto scalare e norma di $\mathbb{R}^n$: il prodotto scalare di un vettore per se stesso coincide col quadrato della sua norma, da cui ne seguono immediatamente 1) e 2). Una funzione che gode di queste due proprietà è talvolta detta *definita positiva*, mentre se verifica solo la 1), viene anche detta *semidefinita positiva*.
La terza è la proprietà commutativa del prodotto scalare. Una funzione che la verifica viene talvolta detta *simmetrica*.
La quarta, che a causa della 3) è valida anche se la somma di multipli appare nel secondo argomento del prodotto scalare, implica di poter mettere in evidenza un fattore esattamente come per il prodotto di numeri. Una funzione che la verifica viene detta *lineare* e tale concetto è di importanza tale da dare il nome all'oggetto di queste note. Per il fatto che vale per entrambi gli argomenti tale proprietà si dice anche *bilinearità*. Una sua conseguenza immediata è l'omogeneità della norma $|u| = \sqrt{uu}$.

Verificarlo.

La funzione $uv = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt$ definisce un prodotto scalare sullo spazio delle funzioni continue su $[0,1]$? E su quello delle funzioni integrabili?

Siano k, n interi, $n > k$ e siano dati k versori $u_1, u_2, \cdots, u_k$, a due a due ortogonali in $\mathbb{R}^n$. (Attenzione! NON sono le componenti di un vettore $u \in \mathbb{R}^k$, ma k vettori diversi in $\mathbb{R}^n$). Supponiamo che $w = \sum_{i=1..k} \alpha_i u_i$. Provare che si ha allora $\forall i = 1..k \;\; \alpha_i = wu_i$. I numeri così definiti vengono detti anche coefficienti di Eulero (o di Eulero-Fourier, o di Fourier) di w rispetto a $\{u_i\}_{i=1..k}$. Nell'analisi dei timbri musicali, i termini $\alpha_i u_i$ con $i > 1$ vengono chiamati di solito *gli armonici*, mentre $\alpha_1 u_1$ è detta *la fondamentale*, e determina in larga misura l'altezza del suono analizzato. I coefficienti di Fourier nel loro complesso determinano il timbro del suono.

Uno *spazio euclideo* è uno spazio vettoriale sul quale sia definito un prodotto scalare, ovvero una funzione bilineare, simmetrica e definita positiva. Dato poi un prodotto scalare si può sempre definire una norma ponendo $|u| = \sqrt{uu}$, sicché ogni spazio euclideo è anche normato. Rimane comunque in sospeso il problema di provare la disuguaglianza triangolare anche per tale norma.

1.4.8 Le proprietà

Cominciamo col calcolare $|u - v|^2$. Da quanto sopra osservato, si ha

$$|u-v|^2 \;=\; (u-v)(u-v) \;=\; u(u-v) - v(u-v) \;=$$
$$=\; uu - uv - vu + vv \;=\; |u|^2 - 2uv + |v|^2$$

La simmetria e la bilinearità rimpiazzano le proprietà commutativa e distributiva del prodotto numerico (chissà perché sono stati cambiati i nomi!) e gran parte dell'algebra elementare si estende senza pena ad $\mathbb{R}^n$. Così accade allo "sviluppo del quadrato di un binomio" visto sopra.
Ci sono però notevoli eccezioni. Ad esempio, il prodotto scalare si comporta in modo catastrofico rispetto alla proprietà associativa. Siano $u = (1, 0, 0)$ e

$v = (0, 1, 0)$. Quanto vale $(uv)v$? Il prodotto scalare uv vale 0, e moltiplicato per v dà il vettore nullo. Invece, $u(vv)$ dà un risultato diverso: $vv = 1$ che moltiplicato per u dà u, che non è nullo.
Dunque, il prodotto scalare si distribuisce benissimo su somme e multipli, e non dà problemi di sorta se si inverte l'ordine dei fattori, ma guai ad eliminare parentesi o accorpare fattori in modo acritico. Come è già stato più volte ricordato, è rischioso non essere consapevoli che la notazione dell'algebra lineare è di proposito identica a quella dell'algebra elementare, per mettere a profitto quanto già noto, ma che non tutto torna! Come vedremo presto, nello spazio $\mathbb{C}^n$, gemello di $\mathbb{R}^n$ a componenti complesse, il prodotto scalare più utile è sì definito positivo, ma non è né simmetrico, né bilineare, pur conservando la stragrande maggioranza delle proprietà interessanti del prodotto di $\mathbb{R}^n$. Anche il prodotto di matrici, che verrà definito a suo tempo, non è commutativo se non in casi particolari. Dunque ... occhi aperti!

1.4.9 Alcuni teoremi classici

Il prodotto scalare e la sua algebra consentono di rivisitare diverse proprietà interessanti della matematica delle scuole.

Teorema 2 *Se u e v sono ortogonali, anche loro multipli arbitrari lo sono.*

La dimostrazione segue immediatamente dalla bilinearità.

Provarlo (se non lo si è già fatto prima).

Teorema 3 *(Teorema di Pitagora) Siano u e v ortogonali in $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

È davvero *quel* teorema di Pitagora?

Dimostrazione: Sviluppando il "quadrato del binomio" a primo membro si ottiene $|u|^2 + |v|^2 + 2uv$, ed essendo u e v ortogonali vale $uv = 0$.

Teorema 4 *(Identità del parallelogramma) Dati u e v in $\mathbb{R}^n$, vale l'identità*

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

Dimostrazione: Basta sviluppare i quadrati a primo membro e semplificare.

Il nome deriva dal fatto che essa asserisce che in un parallelogramma la somma dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati di tutti i lati.

Teorema 5 *Dati u e v in $\mathbb{R}^n$, vale l'identità*

$$uv \;=\; \frac{1}{4}(|u + v|^2 - |u - v|^2)$$

Dimostrazione: anche qui basta sviluppare.

Farlo.

Quest'identità permette, quando occorra, di esprimere il prodotto scalare in funzione della norma, o talvolta di definirlo: un importante resultato di Fréchet, von Neumann e Jordan (vedi Yosida: Functional Analysis ed. Springer, sezione pre-Hilbert spaces) asserisce che, se la norma verifica l'identità del parallelogramma, la funzione uv sopra definita è un prodotto scalare, e $\sqrt{uu}$ è la norma di partenza. In sostanza, le norme che derivano da un prodotto scalare sono tutte e sole quelle che verificano l'identità del parallelogramma.

Teorema 6 *(Euclide-Viete-...) Dati u e v in $\mathbb{R}^n$, vale l'identità*

$$|u-v|^2 \;=\; |u|^2+|v|^2-2|u||v|\cos\widehat{uv}$$

Dimostrazione: basta ricordare l'espressione del coseno dopo aver sviluppato il primo membro.

Proprietà della trigonometria nota come *teorema di Carnot*, essa permette di "risolvere" agevolmente triangoli non rettangoli, noti due lati e l'angolo compreso, o di calcolare gli angoli noti i lati.

Teorema 7 *Per ogni vettore u in $\mathbb{R}^n$, il suo prodotto scalare col vettore nullo dà 0, ovvero $0u=0$.*

Dimostrazione: immediata se si adopera la definizione di prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Per dedurla dagli assiomi si può osservare che

Quali assiomi si adoperano?

Il prodotto scalare verifica la legge di annullamento del prodotto: $uv=0 \Rightarrow u=0$ oppure $v=0$?

$$0u \;=\; (v-v)u \;=\; vu-vu \;=0$$

Attenzione a che cosa rappresenti il simbolo 0 nei vari contesti, nell'enunciato così come nella dimostrazione!

1.5 La proiezione

In questa sezione viene studiato il concetto di proiezione di un vettore nella direzione di un altro, o nella direzione ad esso perpendicolare, applicandone poi i resultati al calcolo dell'area del parallelogramma aventi come lati due vettori assegnati. Viene infine introdotto il prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$, impiegato sistematicamente in fisica, ad esempio nello studio del campo magnetico o della dinamica dei moti rotatori.

1.5.1 La definizione di proiezione

Per proiettare un punto, nel nostro caso l'estremo di un vettore u, su una retta per l'origine occorre condurre la perpendicolare da quel punto alla retta e considerarne il piede. Dal triangolo rettangolo che ne viene fuori segue subito che il cateto che costituisce la proiezione di u sulla retta è di lunghezza $|u||\cos\theta|$, ove θ è l'angolo che u forma con la retta. Immaginando che essa sia costituita dai multipli di un altro vettore v, ci occorrerà un vettore diretto come v ma di lunghezza "orientata" pari a $|u|\cos\theta$, ove il segno del coseno risulta positivo se i versi del vettore proiezione e di v sono concordi e negativo altrimenti. Il versore $v/|v|$ è diretto come v e lungo 1: basta dunque assumere come proiezione $(|u|\cos\widehat{uv})\frac{v}{|v|}$ e sostituirvi l'espressione ottenuta per il coseno in funzione delle componenti. In definitiva:

Disegnare!

Definizione 16 *Dati $u,v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq 0$, si definisce proiezione di u nella direzione di v il vettore*

$$\boxed{P_v u \;\equiv\; \frac{uv}{|v|^2}v}$$

Osserviamo subito che la formula si semplifica se v è un versore, nel qual caso risulterebbe

$$P_v u = (uv)v$$

(...occhio agli scalari, ai vettori e alle parentesi ...). Osserviamo inoltre che, per il modulo del vettore proiezione, vale

Fatto l'esercizio sui coefficienti di Eulero-Fourier?

$$\boxed{|P_v u| \ = \ \frac{|uv|}{|v|}}$$

Verificarlo.

ATTENZIONE ai pericoli mortali dei "colpi di sonno": un lettore disattento potrebbe semplificare la precedente espressione in $|u|$, il che darebbe un risultato corretto solo se u è multiplo di v. Numeri e vettori sono cose diverse, notazione a parte.

1.5.2 Le proprietà

Una proprietà elementare della proiezione è la seguente

Teorema 8 *Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, si verifica*

$$P_v(P_v u) \ = \ P_v u$$

In parole povere, se si proietta la proiezione si trova lo stesso punto. La dimostrazione segue immediatamente dal seguente, più generale

Teorema 9 *Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$,* $\qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad P_v(\lambda v) = \lambda v$

che a sua volta può essere immediatamente dimostrato facendo il calcolo. Farlo!

1.5.3 La decomposizione ortogonale

La sezione seguente illustra la proprietà fondamentale delle proiezioni. Il risultato della proiezione è il punto più vicino a quello proiettato, fra tutti quelli appartenenti alla retta. Cominciamo con il seguente importante

Teorema 10 *Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, $(u - P_v u)$ e $P_v u$ sono ortogonali.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che $(u - P_v u)v = 0$, e la tesi segue ricordando che $P_v u$ è un multiplo di v. Verificarlo!

Posto $x = P_v u$ e $y = u - P_v u$ si vede subito che $u = x + y$, e poiché sono ortogonali, dal teorema di Pitagora segue subito che

Teorema 11 *Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$* $\qquad |u|^2 \ = \ |P_v u|^2 \ + \ |u - P_v u|^2$

Una conseguenza immediata dell'uguaglianza finale della precedente proposizione è : Perché?

Teorema 12

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \ v \neq 0 \qquad |u| \geq |P_v u|$$

e inoltre l'uguaglianza vale se e solo se u e v sono multipli l'uno dell'altro.

Verificare!

In sostanza, ogni vettore è più lungo della sua proiezione nella direzione di ogni altro. Inoltre, la lunghezza di u e quella della sua proiezione su v sono uguali se e solo se il termine $u - P_v u$ è nullo e cioè se $u = P_v u = \frac{uv}{|v|^2} v$, da cui u è multiplo di v. È stato poi già osservato che se u è multiplo di v esso coincide con la sua proiezione.

Siamo ora in grado di dimostrare la proprietà fondamentale:

Teorema 13 *(Teorema della proiezione) Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ e per ogni multiplo λv di v si ha*

$$|u - P_v u| \ \leq \ |u - \lambda v|$$

In sostanza: la proiezione di u su v è il multiplo di v di minima distanza da u.

Dimostrazione.
Essendo tutti i termini positivi, la disuguaglianza da provare è equivalente a quella ottenuta prendendone i quadrati. Si ha poi

$$|u - \lambda v|^2 = |u - P_v u + P_v u - \lambda v|^2$$

Poichè il vettore $P_v u - \lambda v$ è somma di due multipli di v, è esso stesso un multiplo di v, mentre $(u - P_v u)$ è per il lemma precedente ad esso ortogonale; applicando il teorema di Pitagora al secondo membro della precedente uguaglianza si ottiene

$$|u - \lambda v|^2 \ = \ |u - P_v u|^2 + |P_v u - \lambda v|^2$$

L'ultimo dei quadrati è non negativo, ed è zero solo se λv coincide con $P_v u$, da cui la tesi.

Il meccanismo della proiezione ha innumerevoli e insospettabili applicazioni. Ad esempio, esso costituisce uno dei motori della teoria della serie di Fourier, il più potente strumento per l'analisi dei segnali: dalla progettazione dei filtri all'algoritmo di compressione d'immagini JPEG, moltissime applicazioni hanno il loro fondamento nella teoria di Fourier.

I resultati precedenti mostrano come ogni vettore dato u possa essere decomposto nella somma di altri due, uno avente una qualunque direzione prefissata (quella di $v \neq 0$), e l'altro ad essa ortogonale. Tale processo viene talvolta chiamato *decomposizione ortogonale*: la proiezione nella direzione prescelta $(P_v u)$ viene chiamata *componente (o proiezione) di u nella direzione di v*, mentre il "resto" $(u - P_v u)$ viene chiamato *componente (o proiezione) di u ortogonale a v*, e talvolta denotato col simbolo $P_v^{\perp} u$.

1.6 L'area di un parallelogramma

In questa sezione applichiamo i concetti sopra introdotti al calcolo dell'area di parallelogrammi e triangoli.

1.6.1 L'area in $\mathbb{R}^n$, noti il prodotto e le norme dei lati

Iniziamo con un parallelogramma avente per lati due vettori noti u e v. Assumiamo come base v. Per calcolare l'area occorre determinare l'altezza, ovvero la lunghezza del segmento di perpendicolare condotto dall'estremo di u alla retta contenente v. Sappiamo già che essa è la lunghezza della componente di u ortogonale a v e, dalla sezione precedente, che tale lunghezza vale $|P_v^\perp u|$. Ne segue dunque

$$Area(u, v) \ = \ |v|\,|P_v^\perp u|$$

Per ottenere un'espressione più agile, calcoliamone il quadrato, iniziando dal modulo della proiezione di u ortogonale a v. Si ha:

$$|u - P_v u|^2 \ = \ |u|^2 - 2u(P_v u) + |P_v u|^2 \ = \ |u|^2 - 2\frac{uv}{|v|^2}uv + \left(\frac{uv}{|v|^2}\right)^2 |v|^2 \ =$$

$$= \ |u|^2 - \frac{(uv)^2}{|v|^2}$$

Sostituendo nell'espressione già ottenuta per il quadrato dell'area, ed estraendone la radice si ottiene infine, per il parallelogramma di lati u e v

$$\boxed{Area(u, v) \ = \ \sqrt{|u|^2|v|^2 - (uv)^2}}$$

Nessuna pena per il triangolo: basta dividere l'area del parallelogramma per due, come si faceva da bambini.

1.6.2 Ulteriori sviluppi in $\mathbb{R}^2$

La formula precedente esprime in modo elegante l'area in temini di norme e prodotti scalari. Formule diverse, talora più semplici, si possono ottenere continuando a svolgere il calcolo precedente.
Per maggiore semplicità, inizieremo a considerare il caso di $\mathbb{R}^2$. Si ha infatti: Sviluppare e verificare!

$$|u|^2|v|^2 - (uv)^2 \ = \ (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1v_1 + u_2v_2)^2 \ = \ (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

il che fornisce la formula ancora più semplice:

$$\boxed{Area(u, v) = |u_1v_2 - u_2v_1|}$$

L'espressione dentro il valore assoluto sarà studiata e generalizzata nel capitolo sui determinanti. Per adesso limitiamoci ad osservare che esiste un simbolo speciale per denotarla

$$\boxed{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \qquad \equiv \qquad u_1v_2 - u_2v_1}$$

C'è un discreto pericolo di confusione se si deve scrivere, come nella formula dell'area, il valore assoluto di tale espressione: attenzione!

1.6.3 L'area in $\mathbb{R}^n$ in funzione delle componenti

Il calcolo in $\mathbb{R}^n$ è solo formalmente più complesso di quello in $\mathbb{R}^2$. Occorre solo un po' più d'esercizio con gli indici.

$$(u_1^2+u_2^2+...+u_n^2)(v_1^2+v_2^2+...+v_n^2)-(u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n)^2 \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} u_i^2v_j^2 - \sum_{i,j=1}^{n} u_iv_iu_jv_j =$$

(semplificando i termini con $i = j$)

$$= \sum_{i\neq j}(u_i^2v_j^2 - u_iv_iu_jv_j) \;=$$

(raggruppando in un'unica parentesi i termini riguardanti le coppie di indici i, j e j, i, e contandoli come un unico addendo della somma)

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(u_i^2v_j^2 + u_j^2v_i^2 - 2u_iv_iu_jv_j) \;=\; \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}^2$$

La formula finale in $\mathbb{R}^n$ è

$$\boxed{Area(u, v) = \sqrt{\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}^2}}$$

Quante sono le coppie i, j verificanti $i, j = 1..n$, con $i < j$?

Confrontare il numero di moltiplicazioni richieste in $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$.

Si vede immediatamente che, al crescere della dimensione n, il numero di moltiplicazioni da fare, e quindi la complessità del calcolo, rendono più vantaggioso l'impiego della formula che usa norme e prodotto scalare, mentre in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ questa risulterebbe più lenta.

1.7 Il prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$

Completiamo il quadro delle operazioni con i vettori introducendo il prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$. La sua estensione ad $\mathbb{R}^n$ comporta esattamente lo stesso aumento di macchinosità (e la stessa diminuzione di utilità pratica) che si è potuto osservare nella sezione precedente a proposito dell'area, alla quale è strettamente legato.

1.7.1 La definizione

Definizione 17 *Dati u e v in $\mathbb{R}^3$ si definisce il loro* prodotto vettore *(o* prodotto esterno*) $u \wedge v$ ponendo*

$$\boxed{u \wedge v \quad \equiv \quad \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)}$$

Un ausilio alla memoria è di osservare che ciascuna componente del prodotto vettore non contiene le componenti corrispondenti dei fattori, ma solo le altre:

la prima componente del prodotto è funzione delle seconde e delle terze componenti dei fattori e non delle prime.
Osserviamo che il prodotto vettore di due vettori in $\mathbb{R}^3$ è un vettore in $\mathbb{R}^3$.
Un possibile modo di distinguerlo dal prodotto scalare mentre si parla è di dire: "u scalare v" o "u vettore v".

ATTENZIONE! Non esiste un comune consenso sul simbolo da adoperare: Richard Feynman, ad esempio, nel sue mirabili "Lezioni di Fisica" usa il simbolo $u \times v$, mentre Vladimir Arnold (ci limitiamo a scegliere solo fra i sommi), nel suo altrettanto mirabile libro "Metodi matematici della meccanica classica" usa il simbolo $[u, v]$. La solita Babele!!! La nostra notazione è quella adoperata nell'algebra astratta (e anche nello stesso libro di Arnold) per denotare il prodotto esterno, che generalizza ad $\mathbb{R}^n$ quello di $\mathbb{R}^3$, seppure in un contesto formalmente diverso.

ATTENZIONE: il secondo termine, ED ESSO SOLO, è preceduto da un segno meno!!! Il motivo di tale necessità sarà chiaro in pochi istanti.

1.7.2 Un'utilissima proprietà

Ancor prima di elencare le proprietà costitutive del prodotto vettore, soffermiamoci su due fatti importanti nelle applicazioni:

Teorema 14 *Per ogni u e v in $\mathbb{R}^3$*

1. $u \wedge v$ *è ortogonale ad entrambi i fattori u e v.*

2. $$|u \wedge v| = \sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2} = Area(u, v)$$

La 2) è immediata dalla definizione di norma.
La 1) si verifica subito calcolando i prodotti scalari con u e v, e verificando che risultano nulli. Ciò non accadrebbe senza il segno meno sulla seconda componente. Verificarlo!

In sostanza, il prodotto vettore di due vettori dati è un vettore perpendicolare ad entrambi avente modulo uguale all'area del parallelogramma da essi definito. Di simili vettori ce ne sono due, opposti l'uno all'altro, ed il prodotto vettore corrisponde ad una delle due possibili scelte. Talvolta si accenna a questo fatto riferendosi al prodotto vettore come ad un'*area orientata*.
A tale proposito, osserviamo che, denotato con θ l'angolo minore fra u e v e scelto v come base del parallelogramma, l'altezza corrispondente vale $|u||\sin\theta|$, il che fornisce per il modulo di $u \wedge v$ l'espressione della fisica $|u||v||\sin\theta|$. La direzione è quella normale al piano individuato da u e v, mentre per il verso la fisica indica due regole: quella della mano destra e quella della vite, reperibili sui manuali. Per usare la regola della vite, ad esempio, posizionarla (la vite!) in modo da far ruotare "avvitando", e cioè in senso orario, u su v per l'angolo più breve (e cioè quello dei due minore di π): la vite avanzerà nella direzione e nel verso di $u \wedge v$. La definizione adottata è conforme a tale regola. Provarlo per $u = (1, 0, 0)$ e $v = (0, 1, 0)$.

La maniera dei matematici è solo formalmente diversa: prendere il piano contenente i due vettori e spostarsi nel semispazio guardando dal quale bisogna ruotare in senso antiorario il primo vettore di un angolo minore di π per sovrapporlo al secondo; il prodotto punterà nella direzione di questo semispazio. In sostanza, se ci si pone diritti in piedi in modo da vedere il primo vettore del prodotto ruotare in senso antiorario per sovrapporsi al secondo per il cammino più breve, allora il nostro corpo, orientato dai piedi alla testa, punta in direzione e verso concordi al prodotto vettore. Ricordando come gli antichi greci (vedi Platone: Simposio) concludevano la cena bevendo da un unico cratere, PASSANDOSELO ALLA DESTRA, decidiamo di definire positivo il verso antiorario delle rotazioni, che è ciò che vedremmo se fossimo al centro della stanza del simposio, e cioè della bevuta collettiva. ATTENZIONE: naviganti e geometri del catasto la pensano diversamente sull'argomento! Un omino in piedi sul piano dei due vettori vede dunque ruotare in verso positivo il primo fattore per sovrapporsi al secondo per il cammino più breve.
Si vede bene che il concetto di verso positivo delle rotazioni è puramente convenzionale, e ciò rende molto più difficile il darne una definizione "motivata" come nel caso della proiezione, che ha un profondo substrato geometrico (... e se i greci, bevendo, si fossero passato il cratere verso sinistra?).
Uno dei dominii incontrastati del prodotto vettore è, ovviamente, la dinamica della rotazione, ed i già citati libri di Feynman e Arnold sono due possibili (non facili, ma magnifici) riferimenti, fra mille altri.

1.7.3 Gli assiomi e le altre proprietà

Il prodotto vettore gode delle seguenti proprietà assiomatiche:

1. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad (\lambda u + \mu v) \wedge w \;=\; \lambda u \wedge w + \mu v \wedge w$
2. $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$ $\qquad u \wedge v \;=\; -v \wedge u$

Farlo!

La verifica di ognuna di esse può essere effettuata svolgendo i calcoli.
La 1) è identica a quella del prodotto scalare: la linearità. La seconda si chiama anche *antisimmetria*. Le 1) e 2) implicano la bilinearità, enunciata qui sotto assieme ad altre due proprietà.

1. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\qquad w \wedge (\lambda u + \mu v) \;=\; \lambda w \wedge u + \mu w \wedge v$
2. $\forall u \in \mathbb{R}^3$ $\qquad u \wedge u = 0$
3. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $\qquad u \wedge v \wedge w \;=\; v(uw) - w(uv)$

Scambiando i fattori e tenendo conto del segno si ottiene subito anche 2). La 3) richiede un po' di pazienza: basta sviluppare i due membri!

Farlo.

1.7.4 Volume di un parallelepipedo

Il prodotto vettore permette di calcolare rapidamente il volume di un parallelepipedo.
Siano dati tre vettori u, v, w in $\mathbb{R}^3$, e si consideri il paralelepipedo (ovviamente

non necessariamente rettangolo) avente essi come spigoli. Per calcolarne il volume, siano u e v i due lati della base. Allora $|u \wedge v|$ è l'area della base e $u \wedge v$ è diretto come la normale al piano da essi formato. Per calcolare l'altezza h basta dunque proiettare il terzo vettore w in questa direzione, e considerare il modulo del vettore proiezione. Ricordando la sua espressione già calcolata in generale, esso vale

$$h = \frac{|w(u \wedge v)|}{|u \wedge v|}$$

Moltiplicando l'area di base per l'altezza si ottiene infine la semplice formula

$$\boxed{Vol(u, v, w) = |w(u \wedge v)|}$$

Qualche autore fa riferimento all'espressione dentro il valore assoluto come al prodotto triplo dei vettori u, v e w.

Per definire il volume in $\mathbb{R}^n$ sarà utile il concetto di determinante, ma bisognerà attenderne l'introduzione, più avanti.

Un breve commento finale è necessario per soffermarsi sulla principale differenza fra le formule via via presentate e quelle della geometria o della trigonometria classica. Le formule "nuove" dipendono da esse e le integrano, solo per il fatto che fanno direttamente riferimento alle componenti dei vettori. Ad esempio, per calcolare l'area di un parallelogramma costruito su due vettori, per la via classica occorrerebbe scegliere una base e andare a calcolare (o a misurare) la corrispondente altezza, per infine moltiplicarle. La formula dell'area prima presentata fornisce invece direttamente il resultato in funzione delle componenti dei due vettori che formano i lati.

Un'ultima nota! Molte definizioni (forse tutte) sono precedute da vere e proprie dimostrazioni che ne giustificano la formulazione. Il meccanismo è semplice: in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ esistono formulazioni puramente geometriche, alle quali non avrebbe senso rinunciare formulando definizioni in modo con esse contraddittorio. In dimensione maggiore di tre, invece, non c'è più geometria, o almeno non si può più disegnarla, e le definizioni non hanno necessità di confrontarsi "in contraddittorio" con la Matematica preesistente, ma solo di riprodurne (o di richiamarne) le proprietà.

1.8 Le disuguaglianze fondamentali in $\mathbb{R}^n$

Per la prima volta un problema squisitamente teorico! In tutti i discorsi precedenti è rimasta un'intollerabile lacuna: non è stata sinora dimostrata la disuguaglianza triangolare, neppure in $\mathbb{R}^2$, dove pure è un resultato classico della geometria greca. I discorsi che seguono sono dedicati a colmare tale lacuna, completando finalmente le fondamenta del calcolo e della geometria in $\mathbb{R}^n$.

1.8.1 Equivalenza fra la disuguaglianza triangolare e quella di Schwartz

Ambo i membri della disuguaglianza triangolare sono numeri positivi e di conseguenza essa è equivalente a quella ottenuta elevando ambo i membri al quadrato

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \qquad |u+v|^2 \;\leq\; (|u|+|v|)^2$$

da cui, ricordando che $|u+v|^2 \;=\; (u+v)(u+v)$ e sviluppando, si ottiene

$$|u|^2 + 2uv + |v|^2 \;\leq\; |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$$

e cioè

$$uv \;\leq\; |u||v|$$

Sostituendo v con $-v$ nella disuguaglianza iniziale, vera per ogni u e v, e ripetendo il ragionamento si ottiene

$$-uv \;\leq\; |u||v|$$

Verificarlo in dettaglio!

In definitiva, la disuguaglianza triangolare è equivalente alla seguente *disuguaglianza di Schwartz (Cauchy - Buniakowskij - ...)*:

$$\boxed{\forall u, v \in \mathbb{R}^n \qquad |uv| \;\leq\; |u||v|}$$

Non ci resta che provarla!!!

1.8.2 Una dimostrazione in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$

Per la sua grandissima importanza teorica, verranno presentate più dimostrazioni, la prima delle quali è in qualche modo legata alla natura stessa di $\mathbb{R}^n$, mentre le altre sono ugualmente valide in qualsiasi spazio sul quale sia definito un prodotto scalare bilineare, simmetrico e definito positivo.

Perché?

La disuguaglianza è certamente verificata se uno dei due vettori è nullo. Supporremo dunque che i vettori in questione siano non nulli.

Nella sezione nella quale è stato introdotto il prodotto scalare si è iniziato con l'osservare che il coseno dell'angolo fra due vettori di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ è uguale al rapporto fra il loro prodotto scalare e il prodotto delle norme. Si ha dunque

$$\frac{|uv|}{|u||v|} \;=\; |\cos\widehat{uv}| \;\leq\; 1$$

da cui segue subito la tesi (almeno nel piano o nello spazio ordinario!).

1.8.3 La proiezione e la disuguaglianza di Schwartz

La prossima dimostrazione presentata, valida in $\mathbb{R}^n$, fa uso del concetto di proiezione, che richiede tutte le proprietà del prodotto scalare, ma non la disuguaglianza triangolare (non ancora provata).

In particolare, è stato osservato che ogni vettore è più lungo di ogni sua proiezione, e cioè :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0, \qquad |u| \ \geq \ |P_v u| \ = \ \frac{|uv|}{|v|}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per $|v|$ segue la tesi.

Dimostrazione davvero rapida, ma solo perché tutto il lavoro è stato già fatto prima!
Per quanto possa non essere proprio evidente, la disuguaglianza di Schwartz dice "solo" che un vettore è più lungo di ogni sua proiezione su un altro! Davvero nulla di sorprendente!!!

1.8.4 Una dimostrazione diretta dagli assiomi

Una dimostrazione classica molto elegante e diretta — non a caso è stata scelta da Erdős per iniziare il suo libro sulle dimostrazioni più belle dal titolo indicativo: "Proofs from THE BOOK" (pubblicato da Aigner e Ziegler per l'editore Springer, in italiano) — e che usa solo gli assiomi è la seguente. Ricordiamo che, se uno dei vettori è nullo, ambo i membri sono nulli e la disugualianza è verificata. Se no, per ogni scalare λ ed ogni coppia di vettori non nulli u e v, si ha

$$|u - \lambda v|^2 \ \geq 0$$

Sviluppando si ottiene

$$|u|^2 - 2\lambda uv + \lambda^2 |v|^2 \ \geq 0$$

Dall'algebra elementare si sa che il trinomio di secondo grado in λ a primo membro si annulla o ha sempre lo stesso segno del coefficiente del termine di secondo grado, che è $|v|^2$, se e solo se il discriminante è minore o uguale a zero. Dunque

$$\frac{\Delta}{4} \ = \ (uv)^2 - |u|^2 |v|^2 \ \leq \ 0$$

dalla quale, portando le norme a secondo membro ed estraendo le radici di ambo i membri, segue la tesi.

La dimostrazione presentata non impiega alcun riferimento alla geometria o alla trigonometria: ciò che occorre è solo la possibilità di sviluppare il "quadrato del binomio", e cioè la bilinearità e la simmetria del prodotto scalare, e la conoscenza del segno di vv, che deriva dal fatto che il prodotto è definito positivo.

1.8.5 L'area e un'ulteriore dimostrazione

Osserviamo, davvero "al volo", che la disuguaglianza di Schwartz ha, fra gli innumerevoli altri benefici, quello di assicurare che l'argomento della radice quadrata presente nella espressione dell'area del parallelogramma sia sempre non negativo, coerentemente con la geometria in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$, ma vero in ogni caso anche in $\mathbb{R}^n$. A pensarci bene, però, nella sezione sull'area avevamo già calcolato la differenza $|u|^2|v|^2 - (uv)^2$ e avevamo stabilito che vale $\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}^2$, *per se* maggiore o eguale a zero, in quanto somma di quadrati. Dunque, in realtà sapevamo già che $|u|^2|v|^2 - (uv)^2 \ \geq \ 0$, e così abbiamo ancora un'altro modo di dimostrare la disuguaglianza di Schwartz.

A questo punto la daremo per abbondantemente verificata, e possiamo pensare ad andare oltre. Chi non fosse ancora soddisfatto (non si sa mai!) potrà trovare altre due dimostrazioni nel libro di Algebra lineare di S. Lang ed in quello di Analisi Matematica 2 di E. Giusti, entrambi pubblicati da Boringhieri.

1.8.6 Il caso in cui valga l'uguaglianza

Prima di procedere, però, è interessante soffermarsi a studiare il caso in cui nella diseguaglianza di Schwartz, o equivalentemente in quella triangolare, valga l'uguaglianza.
Per capire cosa accada, basta osservare che, se $|uv| \ = \ |u||v|$, ne segue che il coseno dell'angolo formato dai vettori deve, in modulo, valere 1, e ciò corrisponde ad avere i vettori allineati e con lo stesso verso, se il coseno vale 1, o con i versi opposti, se il coseno vale -1.

Per ottenere prove indipendenti dalla trigonometria, torniamo alla dimostrazione diretta della disuguaglianza di Schwartz. Se u e v sono tali che $|uv| \ = \ |u||v|$ vuol dire che il discriminante del trinomio è zero, e in tale caso il trinomio si annulla per un unico valore $\overline{\lambda}$.
Perché? Ciò vuol dire che $|u - \overline{\lambda}v| = 0$ e dunque $u - \overline{\lambda}v = 0$, da cui infine

$$u \ = \ \overline{\lambda}v$$

Dunque, i due vettori sono allineati: sono l'uno multiplo dell'altro.

Pensando alla proiezione, invece, si è appena osservato che la disuguaglianza di Schwartz equivale a dire che ogni vettore è più lungo di ogni sua proiezione su un altro vettore; quando è stata studiata la proiezione si è anche osservato che essa mantiene la stessa lunghezza se e solo se i due vettori sono multipli l'uno dell'altro.

Approfondiamo il discorso per la disuguaglianza triangolare. Supponiamo che in essa valga l'uguaglianza, e che dunque i vettori siano allineati. Si avrà allora, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = \lambda v$. Ne segue $|\lambda v + v| \ = \ |\lambda v| + |v|$ e, usando l'omogeneità della norma e dividendo per $|v|$, si ottiene $|\lambda + 1| = |\lambda| + 1$, da cui segue infine $\lambda \geq 0$.
In sostanza, oltre ad avere la stessa direzione, i due vettori debbono avere verso concorde, mentre il verso risulterà discorde se è $|u - v| \ = \ |u| + |v|$. Ciò generalizza ad $\mathbb{R}^n$ l'analoga proprietà del valore assoluto.

Queste considerazioni hanno, per ora, l'aspetto di semplici curiosità. In vista di applicazioni rilevanti in futuro, riassumiamo quanto detto in un teorema.

Teorema 15 *Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ tali che $|u + v| = |u| + |v|$. Allora esiste $\lambda \geq 0$ tale che $u = \lambda v$.*

Poiché si è di frequente fatto riferimento agli spazi astratti, concludiamo il capitolo accennando al fatto che uno degli spazi euclidei astratti più importanti è uno spazio di funzioni, e che il prodotto scalare su di esso definito è $uv = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t)\,dt$. Nonostante l'aspetto assai ostico, tale spazio eredita quasi tutte le proprietà di $\mathbb{R}^n$, con la "sole" bizzarrie di richiedere un integrale fatto apposta, di dover identificare due funzioni se l'integrale della loro differenza in modulo fa zero, e di essere di dimensione infinita, in un senso che verrà illustrato più avanti. Nonostante tale fuoco d'artificio, è lo spazio sul quale si effettua meglio l'analisi dello spettro o analisi di Fourier: acustica, telecomunicazioni, spettrometria ... roba pratica, insomma!