

LIMITI: LE DEFINIZIONI

Una teoria completa e unificata di tutto ciò che abbia a che fare coi limiti è possibile, è stata proposta da Mauro Picone nei primi decenni del secolo scorso ("variabili ordinate"), e poi riproposta con altro nome da altri ("filtri"). Include anche gli integrali, come limiti sulle partizioni, è molto elegante, ma è davvero troppo per un corso di 6 crediti.

Già i limiti di funzioni e successioni, includendo tutti i casi, sono diverse decine (finiti e infiniti, in un punto e all'infinito, destri e sinistri, ..., in tutte le combinazioni possibili).

In queste note vengono offerti dei suggerimenti per orientarsi nella notevole varietà di definizioni di limite che si presenteranno nell'Analisi e che, spesso, risulteranno strumenti indispensabili nella teoria.

Ricordo che i limiti, oltre ad essere un modello naturale per tutti i processi di approssimazione, hanno offerto (un secolo dopo) una prospettiva di soluzione alla diatriba fra Newton e Berkeley sulle

contraddizione presente nella definizione di derivata (dell'epoca): non si può - argomentava Berkeley - assumere $x \neq x_0$ per scrivere il rapporto incrementale, come per la funzione $x \rightarrow x^n$,

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k}}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k}$$

e, un istante dopo, porre $x = x_0$ nell'espressione così ottenuta per ottenere la derivata $n x_0^{n-1}$.

L'obiezione di Berkeley era molto solida. Per fortuna Newton non si diede mai per vinto, e così l'Analisi poté svilupparsi.

Le due soluzioni per aggirare sono state (finora)

- 1) la teoria dei limiti: non si pone $x = x_0$, si fa tendere x a x_0 , mantenendo sempre $x \neq x_0$
- 2) L'analisi non standard (Robinson): si definisce no gli infinitesimi ε e si pone

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varepsilon} [f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)]$$

I libri d'Analisi di Vieri Benci sono raccomandati per approfondire questo approccio.

Prima di presentare in modo sintetico le varie definizioni di limite, è necessaria qualche considerazione sul caso forse più importante, quello che risolve la controversia Newton-Berkeley: il limite finito al finito (ossia, in un punto x_0).

La questione è: "In quali punti si può definire il limite in un punto di una funzione,?" La risposta è che il punto deve essere approssimabile con punti su cui si possa calcolare la funzione, ma tutti distinti dal punto (il punto proibito dall'obiezione di Berkeley) in cui si calcola il limite. Occorre scegliere i punti esterni al dominio della funzione, perché non ci si può avvicinare ad essi, al di sotto di un certo limite (il raggio delle sfere tutta fuori del dominio); occorre scegliere, però, anche i punti isolati, in quanto tutte le sfere abbastanza piccole intersecano il dominio della funzione solo nel punto proibito, quello che non si vuole considerare.

DUNQUE: il problema del limite si può porre solo nei punti d'accumulazione del dominio.

GENERATORE DI DEFINIZIONI

DEI VARI LIMITI

$$\lim_A f(x) = B$$

significa

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in \text{dom } f \quad A' \Rightarrow B'$$

ove A, A' e B, B' si ricavano dalle tabelle

$\text{dom } f \subseteq$	A	A'
$\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$	$x \rightarrow x_0$ $x \rightarrow \infty$	$x \neq x_0 \quad x - x_0 < \delta$ $ x > \delta$
$\mathbb{R}$ (soltanto)	$x \rightarrow x_0^+$ $x \rightarrow x_0^-$ $x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty$	$x_0 < x < x_0 + \delta$ $x_0 - \delta < x < x_0$ $x > \delta$ $x < -\delta$

(notare le disuguaglianze strette $x > x_0$ e $x < x_0$!)
e

Codominio	B	B'
$\mathbb{R}^p$ $p \geq 1$	$L \in \mathbb{R}^p$ ∞	$ f(x) - L < \varepsilon$ $ f(x) > \varepsilon$
$\mathbb{R}$ (solitamente)	$+\infty$ $-\infty$	$f(x) > \varepsilon$ $f(x) < -\varepsilon$

NOTA: i limiti $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ hanno senso anche per $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ad esempio, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ in quanto $|\frac{1}{x}| > \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\varepsilon} = \delta, x \neq 0$

Le definizioni precedenti includono, nella sostanza, anche i limiti di successioni, se si pone $a_n = f(n)$, $N = \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}$, e se si considera il $\lim a_n$ come se fosse $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$, in tutti i casi di convergenza e divergenza, a valori reali o vettoriali.

NOTA: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, per tutti i limiti.

ESEMPLI:

1) Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = x_0 \in \mathbb{R}^3$$

vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in [a, b]$$
$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - x_0| < \varepsilon$$

mentre

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \gamma(t) = \infty$$

vuol dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in [a, b]$$
$$t_0 - \delta < t < t_0 \Rightarrow |\gamma(t)| > \varepsilon$$

$$2) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\lim_{\infty} f(x) = \infty$$

vul dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f$$

$$|x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

(la prima norma è in $\mathbb{R}^3$, mentre la seconda è il modulo nei complessi)

mentre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{C}$$

vul dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f$$

$$x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$3) f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

significa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \mathbb{C} |z| > \delta \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon$$

$$4) a_n = (n, \sin n)$$

$$\lim a_n = \infty$$

significa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N}, n > \delta \Rightarrow |a_n| > \varepsilon$$

e, infatti, poiché

$$|a_n| = \sqrt{n^2 + \sin^2 n} \geq \sqrt{n^2} = n$$

basta scegliere $\delta = \varepsilon$.

CRITERI DI CONVERGENZA E DIVERGENZA PER FUNZIONI FRA SPAZI EUCLIDEI

Le definizioni presentate in precedenza permettono formulazioni alternative, talora più comode nelle applicazioni.

TEOREMA :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - L| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

DIM. Immediata, delle quattro definizioni coinvolte.

Visto il notevole patrimonio di tecniche per lo studio dei limiti di funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, è utile studiare il legame fra il comportamento

di una funzione a valori vettoriali e quella delle sue componenti. Ecco un primo risultato.

TEOREMA: Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ e siano $f_1 \dots f_p$ le funzioni definite dalle sue componenti, tal
che, cioè, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$.

Allora :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = L_i$$

per ogni $i = 1 \dots p$.

Per provare il teorema ricordiamo il

LEMMA: Per ogni $a \in \mathbb{R}^p$ sicché:

$$1) |a_i| \leq |a| \quad \forall i = 1 \dots p$$

$$2) |a| \leq \sqrt{p} \max_{1 \dots p} |a_i|$$

DIM. Basta osservare che $|a_i|^2 \leq \sum_{j=1}^p a_j^2 = |a|^2$,
da cui segue 1). Inoltre

$$|a|^2 = \sum_{j=1}^p a_j^2 \leq p \max_{1 \dots p} a_j^2$$

Detto $i: \max_{1 \dots p} a_j^2 = a_i^2$ si ha $|a| \leq \sqrt{p} \cdot \sqrt{\max_{1 \dots p} a_j^2} = \sqrt{p} |a_i|$



DIM. del teorema

Del lemma precedente

$$1) |f_i(x) - L_i| \leq |f(x) - L|$$

$$2) |f(x) - L| \leq \sqrt[p]{\max_{i=1 \dots p} |f_i(x) - L_i|}$$

e, per il teorema del confronto, da 1) segue la condizione necessaria $f(x) \rightarrow L \Rightarrow f_i(x) \rightarrow L_i$, mentre, da 2), se $f_i(x) \rightarrow L_i \forall i=1 \dots p$ allora $f(x) \rightarrow L$. 

Dunque, lo studio dei limiti di funzioni vettoriali è ridotto allo studio delle sue componenti. Purtroppo, nulla di simile vale per il dominio ma non va disprezzata la semplificazione ottenuta nel codominio. Per le curve parametriche, ad esempio, e cioè le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la convergenza è completamente ridotta a quella delle componenti scalari, per le quali sono disponibili il teorema di de l'Hospital e le formule di Taylor, molto utili nel calcolo dei limiti.

TEOREMI SUI LIMITI: UNA SELEZIONE BREVE.

Iniziamo con le forme che assume il teorema della permanente del segno, per funzioni e valori sceleri.

TEOREMA (permanente del segno):

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$, oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta), x \neq x_0$

Dim. Proviamo prima il caso di f convergente ad un limite strett. positivo. Così come si è fatto nel caso delle funzioni continue, si sceglie $\bar{\varepsilon} = L$ e, dall'ipotesi di convergenza, segue che

$\exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } f \ |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$ si ha

$$|f(x) - L| < \bar{\varepsilon} \quad \text{e cioè}$$

$$0 = L - \bar{\varepsilon} < f(x) < L + \bar{\varepsilon}$$

che è la tesi. L'unica differenza nel caso della divergenza è la disuguaglianza finale

$$f(x) > \varepsilon$$

che nell'opportuna sfera $B(x_0, \delta)$, PRIVATA DEL PUNTO x_0 , è la tesi.



ATTENZIONE: non è vero che una funzione convergente ad un limite strettamente positivo conserva il segno in un intorno! Lo conserva in un intorno "bucato"! Per i limiti per $x \rightarrow x_0$, il punto x_0 non esiste! È proprio per questo che la questione Newton-Berkeley è stata risolta!

Esempio: sia $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $x \neq 0$ e $f(0) = -7$.
Si ha subito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Eppure, $f(0) = -7$, e dunque non esistono sfere centrate in 0 in OGNI punto delle quali $f(x) > 0$.

Il prossimo risultato è un teorema di limitatezza locale, e cioè in un intorno.

TEOREMA: Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$,
con $L \in \mathbb{R}^p$ (finito). Allora

$$\exists k \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x)| < k$$

NOTA: manca la condizione $x \neq x_0$, perché non occorre, come si vedrà subito.

NOTA: In sostanza: una funzione convergente è localmente (cioè, in un opportuno intorno) limitata.

DIM. Dall'ipotesi di convergenza, scelto $\bar{\varepsilon} = 1$ ne segue che

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow \\ |f(x) - L| < \bar{\varepsilon} = 1$$

Dalla disuguaglianza triangolare

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$$

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \cap \text{dom} f, x \neq x_0$$

Ne segue che, in $B(x_0, \delta) \cap \text{dom} f$ si ha

$$|f(x)| < \max \{ 1 + |L|, |f(x_0)| \} \equiv k$$



Si vede bene come sia necessario includere $|f(x_0)|$ nella costante k , perché la stima for-

nite della definizione di limite NON riguarda il valore assunto nel punto x_0 nel quale il limite viene calcolato.

Nonostante i deboli addeittamenti, queste dimostrazioni (e tutte le altre) sono formalmente identiche a quelle scalari, colla sola accortezza di usare le norme appropriate. Tale stretta analogia si estende ben oltre: ad esempio, se $f(x) \rightarrow L$ e $g(x) \rightarrow M$, allora $f(x)g(x) \rightarrow LM$ o, se f, g, L ed M sono in $\mathbb{R}^p$, i due prodotti $f(x)g(x)$ e LM sono prodotti scalari. Nella dimostrazione, invece dell'identità $|ab| = |a||b|$, si deve usare la disuguaglianza di Schwarz $|ab| \leq |a||b|$.

Un ultimo risultato, già presentato in un altro contributo, è il teorema del cambio di variabile nei limiti, indispensabile nello studio dei limiti di funzioni composte; anche in questo caso, la prova segue da vicino quella nel caso scalare.

CRITERI DI CONVERGENZA E DI DIVERGENZA.

La semplice ispezione delle definizioni e la stima $|a_i| \leq |a| \leq \sqrt[p]{\max_{1 \leq i \leq p} |a_i|}$ evidenziano che, per funzioni a valori vettoriali in $\mathbb{R}^p$

$$\lim_{?} f(x) = L \iff \lim_{?} |f(x) - L|_{\mathbb{R}^p} = 0$$

ove il punto interrogativo indica una qualunque situazione nel dominio (al finito, all'infinito e, nel caso scalare, da destra, da sinistra, a $+\infty$ e a $-\infty$), ovviamente uguale nei due limiti. Analogamente

$$\lim_{?} f(x) = \infty \iff \lim_{?} |f(x)|_{\mathbb{R}^p} = +\infty$$

Si può talvolta risparmiare un po' di fatica studiando separatamente le componenti

$$\lim_{?} f(x) = L \iff \lim_{?} f_i(x) = L_i \quad \forall i$$

mentre, per la divergenza, vale solo una condizione sufficiente. Infatti:

1) Se una delle componenti f_i diverge, allora f diverge. Infatti la norma di f maggiore il modulo di qualunque componente. Dal teorema del confronto, la divergenza di qualunque componente implica la divergenza a $+\infty$ della norma delle f .

2) Il viceversa è falso, già per le successioni. Infatti, se si considera

$$a_n = \begin{cases} (n, 0) & \text{se } n \text{ è pari} \\ (0, n) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

si ha subito che né $(a_n)_1 = 0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots$
né $(a_n)_2 = 1, 0, 3, 0, 5, \dots$ sono divergenti, ma

$$|a_n| = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

diverge a $+\infty$, e dunque $a_n \rightarrow \infty$. Dunque le componenti possono oscillare mentre la norma, che registra cumulativamente l'apporto di tutte le componenti, può benissimo divergere.

ALCUNE SGRADUEVOLI SORPRESE SULLA DIVERGENZA

Per le funzioni di più variabili, anche a valori scalari, non valgono, purtroppo, parecchi dei risultati che sembrerebbero evidenti per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

1) NON TUTTI I POLINOMI NON COSTANTI SONO DIVERGENTI ALL'INFINITO, come accade in $\mathbb{R}^1$.

Basta considerare $f(x,y) = x$. Se divergere all'infinito, si avrebbe che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |(x,y)| > \delta \Rightarrow |f(x,y)| > \varepsilon$$

e dunque dovrebbe esistere una sfera centrata nell'origine fuori della quale

$$|x| > \varepsilon > 0$$

Ciò è certamente falso, perché sullo asse y , $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x=0\}$, che interseca qualunque sfera centrata in $(0,0)$,

le f vale identicamente 0. Dunque
 $f(x,y) = x$, oppure $f(x,y) = y$ o ancora
 $f(x,y) = xy$ non divergono all'infinito.

Ci sono le dovute eccezioni! Ad esempio,
il polinomio $f(x,y) = |(x,y)|^2 = x^2 + y^2$,
diverge certamente all'infinito perché, scelto
 $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza di divergenza
 $|f(x,y)| > \varepsilon$ equivale a $x^2 + y^2 > \varepsilon$, che è
vera se $|(x,y)| > \sqrt{\varepsilon}$, e dunque basta
porre $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Degli esempi meno evidenti sono offerti
dalle forme quadratiche definite, che sono
tutte divergenti all'infinito (con il segno
appropriato). Ricordando che, delle teorie
delle forme quadratiche

$$\lambda |(x,y)|^2 \leq f(x,y) \leq \Lambda |(x,y)|^2 \quad \forall (x,y)$$

ovv λ è il minimo autovalore e Λ il massi-
mo, del teorema del confronto e della divergen-
za delle norme al quadrato, appena osservate,

si ha che, da $\lambda |(x,y)|^2 \leq f(x,y)$, se $\lambda > 0$
 f diverge a $+\infty$ mentre, se $\lambda < 0$, da
 $f(x,y) \leq \lambda |(x,y)|^2$ segue che $f \rightarrow -\infty$.

In tutti gli altri

casi (forme semidefinite o indefinite)
il limite non esiste (se non sono identicamente
nulle) in quanto ci sono gli autoassi di 0
nel caso semidefinito, e rette opposte nel
caso indefinito, su quel $f \equiv 0$ mentre su
altre rette divergerà.

Ad esempio, $f(x,y) = x^2$ si comporta così
come $f(x,y) = x$: è zero a tappeto sull'asse
 y e, per la stessa ragione oscilla (ad esempio,
diverge sull'asse x , a $+\infty$). Analogamente
 $f(x,y) = x^2 - y^2$, che ha autovalori 1 e -1,
diverge a $+\infty$, a guardare l'asse x , ma a
 $-\infty$ guardando l'asse y , e si annulla su $y = \pm x$.

La morale è che convergente e divergente sono merce piuttosto rara per le funzioni di più variabili!

Il concetto di funzione omogenea, che generalizza quello di polinomio omogeneo, fornisce qualche aiuto per estendere, in qualche modo e con molte precauzioni, il concetto d'ordine d'infinitesimo ed il suo impiego nei limiti alle funzioni di più variabili. È reperibile in altri contributi.