CONTINUITA'

L'estensione dei concetti e dei risultati della teoria delle funzioni continue al caso del dominio e del codominio vetto-
riali non presenta nessuna difficoltà, purché si riformulino le definizioni evitando con cura tutte le diseguaglianze - prive di senso per i vettori - e utilizzando in loro luogo la distan-
za prima introdotta.
La definizione classica di continuità per funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene spesso posta così

" $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \Omega$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ "

inutilizzabile se dominio o codominio sono vettoriali. Se, però, utilizziamo la formulazione equivalente

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

non c'è più alcuna incompatibilità con i vettori, a patto di rimpiazzare i valori assoluti in $\mathbb{R}$ con le norme corrispondenti

DEFINIZIONE: Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, sarà detta CONTINUA in $x_0 \in \Omega$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \ |x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon$$

NOTA: si possono omettere le indicazioni sulle norme da impiegare, in quanto $|x - x_0|$ usa certamente la norma del dominio, mentre $|f(x) - f(x_0)|$ si riferisce certamente al codominio.

L'intero corpus dei risultati elementari sulle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ si estende senza alcuna modifica apparente al caso di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, con l'unica accortezza di utilizzare in ogni spazio, dominio o codominio che sia, la propria norma: il valore assoluto in $\mathbb{R}$, il modulo complesso in $\mathbb{C}$, e la norma euclidea negli spazi $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).
A titolo d'esempio, proviamo il teorema della permanenza del segno che, occupandosi di funzioni positive, è limitato alle sole funzioni a valori

scalari.

TEOREMA (della permanenza del segno):
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se $f(x_0) > 0$ ed f è continua in x_0, allora

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta) \quad f(x) > 0$$

In sostanza: una funzione continua positiva (strettam.) in un punto resta tale in tutti i punti del dominio abbastanza vicini ad esso.

NOTA. Se si sostituisce f con $-f$ si nota che l'analogo teorema vale se $f(x_0) < 0$.

DIM. Dalla continuità in x_0, scelto $\bar{\varepsilon} = f(x_0)$ segue che

$$\exists \bar{\delta} > 0 : \forall x \in \Omega \quad |x - x_0| < \bar{\delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \bar{\varepsilon}$$

Visto che f è a valori scalari, l'ultima disuguaglianza può scriversi nel solito modo

$$f(x_0) - \bar{\varepsilon} < f(x) < f(x_0) + \bar{\varepsilon}$$

e, per come è stato scelto $\bar{\varepsilon}$, si ha infine

$$\forall x \in \Omega, \quad |x - x_0| < \bar{\delta} \Longrightarrow f(x) > 0 \qquad \blacksquare$$

Nessuna differenza con la prova nel caso scalare: sono formalmente identiche, e l'unica differenza sostanziale riguarda la norma da usare nel dominio, che sarà quella euclidea.
Un altro esempio, illuminante sul motivo di alcune scelte di assiomi per la norma, è il classico teorema sulla continuità della somma.

TEOREMA: Se $f: \Omega \to \mathbb{R}^p$ e $g \in \Omega \to \mathbb{R}^p$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sono continue in $x_0 \in \Omega$, allora $f+g$ è continua in x_0.

DIM. Occorre provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega$$
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| f(x) + g(x) - \left(f(x_0) + g(x_0)\right) \right| < \varepsilon$$

Poiché

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| = \left| \left(f(x) - f(x_0)\right) + \left(g(x) - g(x_0)\right) \right|$$

dalla disuguaglianza triangolare ne segue che

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \le |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

Fissato allora $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, e considerato $\frac{\varepsilon}{2}$, dalla continuità di f e di g in x_0 segue che

$$\exists \delta_1 > 0 \; ; \; \forall x \in \Omega \;\; |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \; ; \; \forall x \in \Omega \;\; |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Infine, posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dalle disuguaglianze provate prima segue che

$$|f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per tutti gli $x \in \Omega$ per i quali $|x - x_0| < \delta$.

$\blacksquare$

La disuguaglianza triangolare per la norma sostituisce l'analoga disuguaglianza per il valore assoluto, e la dimostrazione è rimasta identica. Vediamo altri due esempi:

TEOREMA: Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $a_n, x_0 \in \Omega$, $a_n \to x_0$. **Allora, se f è continua in x_0, $f(a_n) \to f(x_0)$.**

Dim. Occorre provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu \; ; \; \forall n > \nu \;\; |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Poiché f è continua in x_0, scelto lo stesso ε $\exists \delta > 0 : x \in \Omega \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Volendo impiegare tale disuguaglianza con $x = a_n$, occorre dunque provare che 1) $a_n \in \Omega$ (che vale per ipotesi) e 2) $|a_n - x_0| < \delta$ (che segue dall'ipotesi $a_n \to x_0$, per tutti gli n maggiori di un opportuno ν). $\boxed{//}$

L'idea di utilizzare il "δ" della funzione più "esterna" come "ε" per quella più interna funziona ottimamente anche nell'ultimo esempio.

TEOREMA (continuità delle funzioni composte)
Siano $f : \Omega \to \Sigma$ e $g : \Sigma \to H$, ove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Sigma \in \mathbb{R}^n$ e $H \subseteq \mathbb{R}^p$. Siano inoltre f continua in $x_0 \in \Omega$, e g continua in $f(x_0) \in \Sigma$.
Allora, la funzione composta $h(x) = g(f(x))$ è continua in x_0.

DIM. Osserviamo che h è definita in Ω perché $\forall x \in \Omega \quad f(x) \in \Sigma = \text{dom}\, g$.

Occorre provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Dato che g è continua in $f(x_0)$ ne segue che, scelto lo stesso $\varepsilon>0$ $\exists\,\sigma>0$: $\forall y\in\Sigma$

$$|y-f(x_0)|<\sigma \Rightarrow |g(y)-g(f(x_0))|<\varepsilon \qquad (*)$$

Come già visto nel teorema precedente, per utilizzare le disuguaglianze di continuità appena scritta occorre porre $y=f(x)$, e dunque occorre verificare che 1) $f(x)\in \operatorname{dom} g=\Sigma$, vero per ipotesi, e 2) $|f(x)-f(x_0)|<\sigma$. Dalla continuità di f in x_0, scelto tale σ, esisterà $\delta>0$ tale che, per gli $x\in\Omega$ $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\sigma$ e, da $(*)$, per $y=f(x)$ segue

$$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon$$

∎

Un risultato sulle funzioni continue vettoriali, che non deriva da quello per le funzioni scalari è il seguente

TEOREMA: Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ e siano $f_1,\dots,f_p$ le funzioni, definite su Ω a valori scalari tali che

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_p(x))$$

Allora, f è continua in $x_0\in\Omega$ se e solo se lo sono tutte le funzioni componenti f_i.

DIM. La dimostrazione segue immediatamente dalle disuguaglianze, valide per $a \in \mathbb{R}^p$

$$|a_i| \le |a| \quad \forall i = 1..p$$

e

$$|a| \le \sqrt{p} \max_{1..p} |a_i|$$

Infatti

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < |f(x) - f(x_0)|$$

e

$$|f(x) - f(x_0)| \le \sqrt{p} \max_{1..p} |f_i(x) - f_i(x_0)|$$

da cui

CN

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$$

CS

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}} \ \forall i \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

che è la tesi.