# SPAZI METRICI E DISTANZE

I concetti di convergenza, di continuità e di limite, nati prima del XX secolo, in cui gli studi di topologia sono esplosi, hanno preso le mosse da quello di distanza. Prima, dunque, di introdurli negli insiemi oggetto di questo corso, le funzioni fra spazi euclidei, dovremo approfondire un aspetto della struttura euclidea che è stato alquanto trascurato nello studio dell'Algebra Lineare. Anche se faremo sempre riferimento ad $\mathbb{R}^n$, i concetti che seguono sono molto generali e, in realtà, non richiedono neppure la struttura lineare: quella di spazio vettoriale.

DEFINIZIONE: Un insieme (arbitrario) si dirà SPAZIO METRICO se esiste $d: X \times X \to \mathbb{R}$, detta METRICA O DISTANZA su X, tale che:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$
2) $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$

3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

<u>In sostanza</u>:

- Per ogni coppia di punti è definita una distanza
- E' sempre maggiore o uguale a zero
- E' uguale a zero se e solo se i punti coincidono
- E' indipendente dall'ordine con cui si considerano i punti
- Vale la <u>disuguaglianza triangolare</u> originale di Euclide: nel triangolo di vertici $x, y, z$, ogni lato è minore o uguale alla somma degli altri due.

<u>ESEMPIO</u>:

$\mathbb{R}$ è uno spazio metrico se si pone
$d(x,y) = |x-y|$
Le verifiche sono immediate, e suggeriscono di investigare sul legame fra spazi normati

e in particolare euclidei, e spazi metrici.

**TEOREMA:** Sia $X$ uno spazio normato. Allora $d(x,y) = |x-y|$ definisce su $X$ una distanza.

Dunque: **Tutti gli spazi normati sono metrici.**

**DIM.** Ricordiamo che su $X$ è definita una norma, verificante

$$|x| \geq 0 \qquad |\lambda x| = |\lambda|\,|x|$$

$$|x| = 0 \iff x = 0 \qquad |x+y| \leq |x| + |y|$$

da cui

$$d(x,y) = |x-y| \geq 0 \quad \forall x,y \in X$$

$$d(x,y) = |x-y| = 0 \iff x-y=0 \Rightarrow x=y$$

$$d(x,y) = |x-y| = |-1|\,|x-y| = |y-x| = d(y,x)$$

$$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| =$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

$\blacksquare$

Dunque $\mathbb{R}^n$ è metrico e la distanza fra due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ è

$$d(x,y) = |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

che è l'ordinaria distanza fra due punti calcolata iterando il teorema di Pitagora.

Il fatto di non avere usato da nessuna parte la somma o il multiplo scalare per definire la metrica, e dunque lo spazio metrico, fa sì che, pur presentando strette analogie col concetto di norma e i relativi spazi, essi siano molto più generali. In effetti:

__TEOREMA__ : __Se__ $X$ __è metrico, con distanza__ $d$, __e__ $Y \subseteq X$ __allora__ $Y$ __è metrico con la stessa distanza.__

__ESEMPIO__ : La superficie della sfera unitaria $S^{n-1}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = 1\}$ è uno spazio

metrica con l'ordinaria distanza in $\mathbb{R}^n$.
Il motivo per la notazione $S^{n-1}$ è da ricercarsi nel fatto che, ad esempio, la sfera in $\mathbb{R}^3$ è una superficie a DUE dimensioni; quella di $\mathbb{R}^2$, la circonferenza unitaria, è una curva ad UNA dimensione: "sempre" una di meno. Per fare un discorso "pulito", occorre la Geometria Differenziale, ma credo ci si possa accontentare.

Una volta capito cos'è una distanza, è immediato definire le sfere "cave", come quelle appena considerate, o "piene".

<u>DEFINIZIONE</u>: <u>Per ogni</u> $x_0 \in \mathbb{R}^n$ <u>e</u> $\rho \geq 0$ <u>si definisce</u>

$$B(x_0, \rho) \equiv B_\rho(x_0) \equiv$$

$$\equiv \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho \}$$

<u>che verrà detta</u> <u>palla aperta di centro</u> $x_0$ <u>e raggio</u> $\rho$.

La palla chiusa include anche la superficie

$$\overline{B}(x_0,\rho)=\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x-x_0|\leq\rho\}$$

La sfera, infine, include solo la superficie, ed è quella di Euclide

$$S(x_0,\rho)=\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x-x_0|=\rho\}$$

La palla aperta verrà anche detta INTORNO di centro $x_0$ e raggio $\rho$.

# PUNTI INTERNI, ESTERNI E DI FRONTIERA. INSIEMI APERTI E CHIUSI

DEFINIZIONE: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, il punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dirà INTERNO ad $\Omega$ se

$$\exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \subseteq \Omega$$

e si dirà ESTERNO ad $\Omega$ se

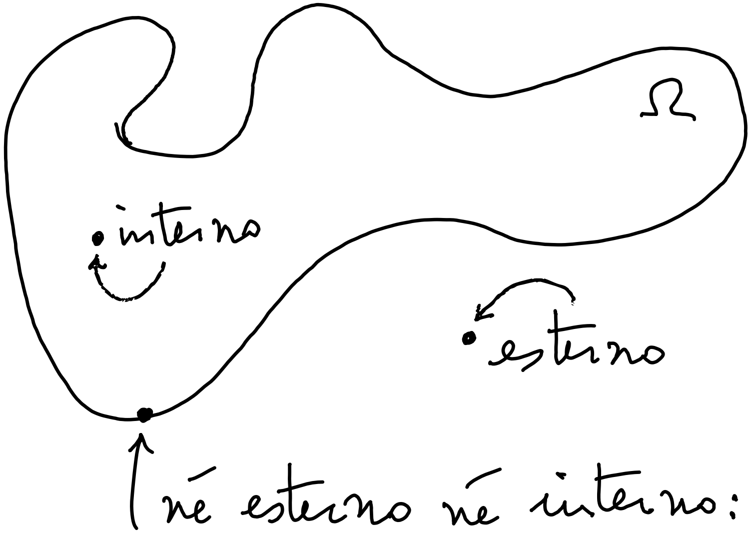
$$\exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \cap \Omega = \emptyset$$

cioè, se è interno al complementare di $\Omega$.

ATTENZIONE: $x_0$ INTERNO ad $\Omega$ non vuol dire (solo) che vi appartiene: deve appartenervi con tutta una sfera, opportuna, di centro $x_0$. Analogamente, un punto ESTERNO non solo non sta in $\Omega$, ma non ci stanno neppure tutti i punti abbastanza vicini.

DEFINIZIONE: Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà APERTO se ogni suo punto è interno. Dunque, $\Omega$ è APERTO se

$$\boxed{\forall x_0 \in \Omega \ \exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \subseteq \Omega}$$




né esterno né interno: ogni sfera, comunque piccola, non è interamente contenuta né in $\Omega$ né nel suo complementare.

Indipendentemente dal fatto che appartenga-no o meno ad $\Omega$, ci sono punti che non sono né interni né esterni. Ad esempio, se $x_0 = 0$ e $\Omega = [0,1]$, qualunque sfera $B(0,\rho)$ conterrà numeri positivi e numeri negativi e dunque non sarà tutta contenuta né in $\Omega$ né nel suo complementare.

**DEFINIZIONE**: Dato $\Omega$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dirà PUNTO DI FRONTIERA di $\Omega$ se

$$\boxed{\forall \rho > 0 \quad \exists \bar{x} \in \Omega \text{ e } \bar{\bar{x}} \notin \Omega : \quad \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in B(x_0, \rho)}$$

In sostanza: ogni sfera interseca sia $\Omega$ sia il suo complementare. L'insieme di tali punti si chiamerà FRONTIERA di $\Omega$, e si denoterà con $\partial\Omega$.

NOTA: Ogni punto interno ad $\Omega$ vi appartiene, perché è il centro di una sfera tutta contenuta in $\Omega$.

Ogni punto esterno non appartiene ad $\Omega$, perché è il centro di una sfera che non lo interseca.

Un punto che non è né interno né esterno è di frontiera e nulla può dirsi sul fatto che appartenga a $\Omega$ o no. Ad esempio, se $\Omega = [0, 1[$, la sua frontiera è costituita da $0$ e $1$, e $0 \in \Omega$ mentre $1 \notin \Omega$.

Poiché i ruoli di $\Omega$ e del suo complementare sono intercambiabili nella definizione di punto di frontiera, ne segue che

TEOREMA: I punti di frontiera di $\Omega$ lo sono anche per il suo complementare, e viceversa

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ verrà detto CHIUSO se contiene la propria frontiera, cioè se $\partial\Omega \subseteq \Omega$.

Esempio $\Omega = [0,1]$ è chiuso perché contiene la sua frontiera $\{0,1\}$.

Un'interessante proprietà è quella seguente

TEOREMA: Se $\Omega$ è aperto, il suo complementare è chiuso. Se $\Omega$ è chiuso, il suo complementare è aperto.

DIM. Se $\Omega$ è aperto, ogni suo punto è interno e

e dunque ogni punto della sua frontiera, non appartiene ad $\Omega$ e, dunque, appartiene a $\complement\Omega$.
Di conseguenza, poiché la frontiera di $\Omega$ coincide con quella del complementare $\complement\Omega$, ne segue che ogni punto della frontiera del complementare non può appartenere ad $\Omega$, e dunque è contenuto nel complementare, da cui la tesi. Scambiando i ruoli di $\Omega$ e $\complement\Omega$, si prova il viceversa.

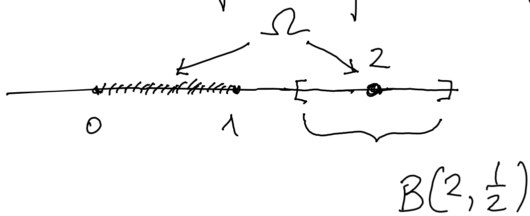
# PUNTI D'ACCUMULAZIONE E PUNTI ISOLATI

**DEFINIZIONE**: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice ISOLATO se

$$\exists \rho > 0 \; : \; B(x_0, \rho) \cap \Omega = \{x_0\}$$

**NOTA**: $\{x_0\} = B(x_0, \rho) \cap \Omega \subseteq \Omega$, e dunque $x_0 \in \Omega$.

**ESEMPIO**: $\Omega = [0,1] \cup \{2\}$. Allora $x_0 = 2$ è isolato per $\Omega$ perché $B(2, \frac{1}{2}) \cap \Omega = \{2\}$.




I punti di $\Omega$ che non sono isolati devono verificare la seguente

**DEFINIZIONE**: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sarà detto PUNTO DI

**ACCUMULAZIONE** di $\Omega$ (o per $\Omega$) se

$$\forall \delta > 0 \ \exists x \in \Omega \cap B(x_0, \delta) \text{ con } x \neq x_0$$

NOTA: apparentemente, sembra che le due definizioni siano l'una la negazione della altra e, in effetti, lo sono se si parla dei punti $x_0 \in \Omega$. Va però notato che, mentre i punti isolati appartengono ad $\Omega$ per definizione, i punti di accumulazione possono benissimo non appartenere all'insieme. Dunque

| |
|---|
| I PUNTI DI $\Omega$ sono o isolati o di accumulazione |

NOTA: Che legame c'è fra la definizione di punto di frontiera e quella di punto di accumulazione? Poco!

1) Tutti i punti interni sono di accumulazione

Infatti, qualunque sfera centrata in $\Omega$ interseca la sfera tutta contenuta in $\Omega$ che esiste perché il punto è interno, e in tale intersezione ci sono infiniti punti di $\Omega$.

2) I punti isolati non sono di accumulazione, ma sono di frontiera

3) Preso $\Omega = [0,1[$, $x_0 = 1$ è di accumulazione perché ogni intervallo centrato in esso interseca $\Omega$ in un intervallo, ed è di frontiera.

4) I punti esterni non sono di accumulazione: tutte le sfere di raggio abbastanza piccolo non intersecano $\Omega$

In conclusione:

- I punti interni sono di accumulazione
- I punti esterni non sono di accumulazione
- I punti di frontiera possono essere sia di accumulazione sia isolati.

La proprietà più illuminante dei punti di accumulazione, strettamente legata al concetto di limite è

**TEOREMA**: Sia $x_0$ un punto di accumulazione per $\Omega$. Allora, esistono $x_n \in \Omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tali che $x_n \to x_0$.

In sostanza: ogni punto di accumulazione può essere approssimato con punti dell'insieme.

DIM. Poiché $x_0$ è di accumulazione, scelto $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists\, x_n \neq x_0$, $x_n \in \Omega$ e $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, e cioè $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$.

Per provare che $\lim x_n = x_0$ basta osservare che, per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $n > \nu > \frac{1}{\varepsilon}$, si ottiene $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \frac{1}{\nu} < \varepsilon$ $\blacksquare$

In conclusione, i punti di accumulazione sono esattamente quelli approssimabili coi punti dell'insieme, che vi appartengano o no. Quando bisognerà definire il limite di una funzione sarà meglio ricordarsene.

In realtà, quanto appena detto può essere notevolmente raffinato. In effetti, la proprietà di essere approssimabile con punti dell'insieme non caratterizza i punti di accumulazione. Se, infatti, $x_0$ è isolato per $\Omega$, e dunque vi appartiene, nulla vieterebbe di approssimarlo con la successione costante $x_n \equiv x_0 \ \forall n$, che certamente converge ad $x_0$. Cosa hanno in più i punti di accumulazione? La dimostrazione precedente costruisce la successione $x_n$, convergente ad $x_0$, con la proprietà addizionale che $x_n \neq x_0$, cosa impossibile se $x_0$ è un punto isolato, perché tutti i punti abbastanza vicini ad esso e da esso distinti non appartengono ad $\Omega$. Concludendo:

> Ogni punto di accumulazione di $\Omega$ può essere approssimato con ALTRI punti di $\Omega$.

Concludiamo con due definizioni

**DEFINIZIONE**: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si denota con $\mathring{\Omega}$ l'insieme dei suoi punti interni. Viene anche detto l'INTERNO di $\Omega$.

**DEFINIZIONE**: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce la CHIUSURA di $\Omega$, e si denota con $\overline{\Omega}$, l'unione di $\Omega$ e della sua frontiera.

**NOTA**: La chiusura $\overline{\Omega}$ di $\Omega$ contiene la sua frontiera, che può essere formata tanto da punti isolati, che per definizione sono già punti di $\Omega$, quanto da punti d'accumulazione di $\Omega$. Ne segue che un modo alternativo di definire la chiusura di $\Omega$ è di definirla come l'unione di $\Omega$ e dei suoi punti d'accumulazione.

I punti della chiusura di $\Omega$ vengono detti anche PUNTI ADERENTI di $\Omega$: sono tutti i punti limite di successioni convergenti di punti di $\Omega$.

Può essere di qualche utilità il concetto di DISTANZA di un punto da un insieme. Premesso che NON è una distanza nel senso degli spazi metrici, esso può servire a meglio visualizzare i concetti sin qui espressi:

**DEFINIZIONE: Dati** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **e** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ **si definisce DISTANZA DI** $x_0$ **DA** $\Omega$ **come il numero**

$$d(x_0, \Omega) = \inf_{x \in \Omega} d(x, x_0)$$

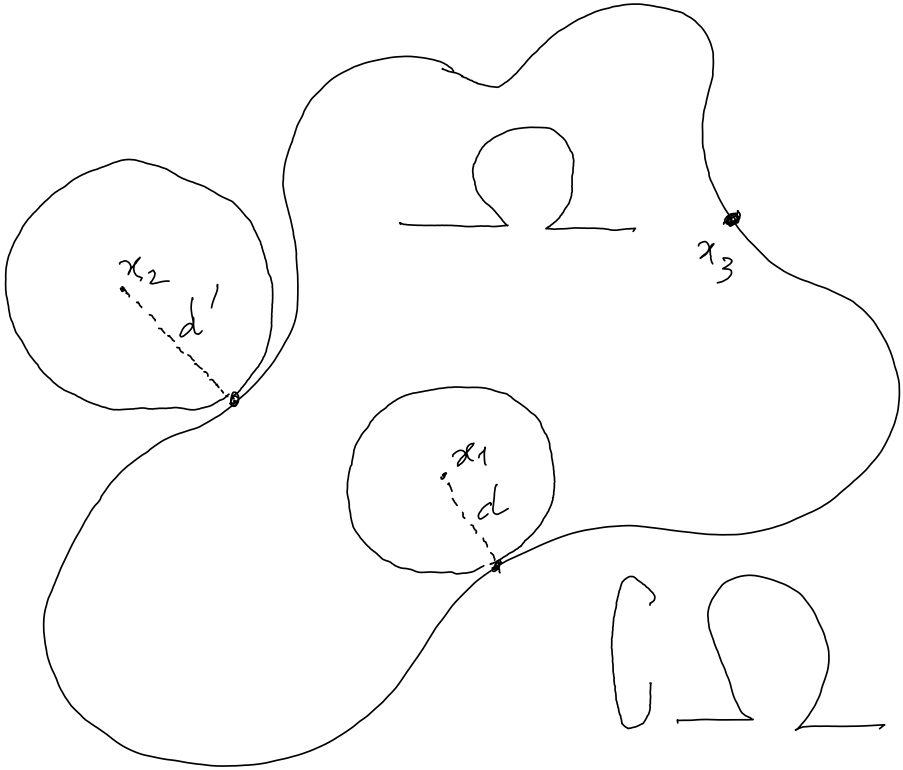
**ove** $d(x, x_0)$ **è l'ordinaria distanza in** $\mathbb{R}^n$.

Se $\Omega$ è non vuoto, e contiene $\bar{x}$, $d(x_0, \Omega) \leq |\bar{x} - x_0|$ ed è dunque finito. E' anche non negativo.

Osserviamo, senza fare tutte le verifiche, che $x_0$ è esterno ad $\Omega$ se e solo se $d(x_0, \Omega) > 0$,

è interno ad $\Omega$ se e solo se $d(x_0, \complement\Omega) > 0$;

mentre appartiene a $\bar{\Omega}$ se e solo se $d(x_0, \Omega) = 0$ e infine appartiene a $\partial\Omega$ se e solo se $d(x_0, \Omega) = 0$ e $d(x_0, \complement\Omega) = 0$.




$x_1$ è interno: $d(x_1, \complement\Omega) = d$

$x_2$ è esterno: $d(x_2, \Omega) = d'$

$x_3$ è di frontiera: $d(x_3, \Omega) = d(x_3, \complement\Omega) = 0$

Le definizioni stesse di punto interno, esterno e di frontiera sono delle riformulazioni delle tre condizioni precedenti. Ad esempio se $x_0$ è interno esiste una sfera $B(x_0, \delta) \subseteq \Omega$, sicché in essa non ci sono punti di $\complement\Omega$ e la distanza di $x_0$ da essi deve essere almeno $\delta$, e dunque l'estremo inferiore di tali distanze deve essere maggiore o eguale a $\delta$.