PROVA SEMPLICE DEL TEOREMA SPETTRALE COMPLESSO

(6-1-2021)

Placido Longo

Il titolo di questa breve nota è proprio scorretto: la semplicità della prova presentata è dovuta, infatti, all'utilizzo di alcuni concetti e risultati che si presuppongono noti, e che non sono esattamente elementari.
In effetti, occorre conoscere il concetto di complemento ortogonale, e la sua proprietà di somma diretta. Verranno richiamati per completezza.

<u>DEFINIZIONE</u>: Dato uno spazio euclideo X, ed un suo sottospazio Y, si definisce il <u>complemento ortogonale di Y in X</u> come l'insieme

$$Y^{\perp} = \{ x \in X \,;\, xy = 0 \quad \forall y \in Y \}$$

Si riconosce subito che $Y^\perp$ è un sottospazio di X e, con poca fatica, si dimostra che, per il teorema della proiezione,

$$X = Y \oplus Y^\perp,$$

da cui segue subito

$$\dim X = \dim Y + \dim Y^\perp$$

Tali risultati sono stati oggetto di altri contributi.
Altri risultati indispensabili per provare il teorema spettrale (per esempio: teorema di esistenza di una base ortonormale di autovettori) sono il teorema di esistenza di autovettori (detto teorema degli spazi invarianti) e il lemma, immediato ma fondamentale, che prova che il complemento ortogonale di un autovettore di A è invariante, ossia mutato in sé dall'operatore A. Tutto ciò, e in special modo il teorema di esistenza degli autovettori, piuttosto delicato,

richiede numerosi prerequisiti. Fatta tale debita premessa, la dimostrazione può essere ottenuta facilmente per induzione.

TEOREMA SPETTRALE COMPLESSO:
Sia $A: X \to X$ lineare e autoaggiunto, con X spazio euclideo COMPLESSO di dimensione finita (non nulla).
Allora, esiste una base ortonormale di X formata da autovettori di A (o base spettrale).

DIM. (per induzione sulla dimensione di X)

Il teorema è vero se $\dim X = 1$. Infatti, per il teorema d'esistenza degli autovettori, esisterà $v \in X$ autovettore di A, da cui segue $v \neq 0$. Per il teorema dei generatori $X = \langle v \rangle$, e la base ortonormale richiesta è $\{v/|v|\}$.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per tutti gli spazi di dimensione n, e proviamola per quelli di dimensione $n+1$. Dunque, sia

$\dim X = n+1$, con $n>0$, perché il caso $n=0$ corrisponde al caso $\dim X = n+1 = 1$, già considerato. Come prima, sia v un autovettore di A in X, che esiste per il teorema d'esistenza, e si pone

$$W = \langle v \rangle^{\perp}$$

Per la proprietà della somma diretta prima richiamata si ha

$$\dim X = \dim \langle v \rangle + \dim W,$$

e, poiché $\dim \langle v \rangle = 1$, ne segue $\dim W = n$. Poiché A è autoaggiunta, da $wu=0$ segue subito $A(w)u=0$, e dunque $A: W \to W$. Poiché $\dim W = n > 0$, si può applicare ad A e W l'ipotesi induttiva, ed esiste una base ortonormale di autovettori di A in W, $\{v_1, \dots, v_n\}$. Per definizione di W, v è ortogonale ad ogni v_i e dunque

$$v_1, \dots, v_n, v/|v|$$

è un sistema di autovettori di A ortonormale e quindi indipendente. Essendo essi $n+1$ $(\dim X)$ vettori indipendenti, per il teorema dei

generatori, formano una base di X. Essendo tutti autovettori di A ed essendo un sistema ortonormale, la tesi è provata.

$\blacksquare$

Nota: tutti i risultati utilizzati nella dimostrazione sono stati presentati altrove. In particolare:

- $\dim X \oplus Y = \dim X + \dim Y$ (AL_3.2)
- $X = Y \oplus Y^{\perp}$ (AL_2.4, pag. 8)
- Se A è autoaggiunto e u è un autovettore di A, allora $wu = 0 \Rightarrow A(w)u = 0$ (AL.7.1)
- Se $A : X \to X$, X spazio vettoriale complesso di dimensione finita (non nulla), allora esistono $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u \in X$ tali che
$$A(u) = \lambda u \quad e \quad u \neq 0 \qquad \text{(AL_7.1)}$$