

# PROVA SEMPLICE DEL TEOREMA

## SPETTRALE COMPLESSO

(6-1-2021)

Placido Longo

Il titolo di queste brevi note è proprio scorretto: le semplicità delle prove presentate sono dovute, infatti, all'utilizzo di alcuni concetti e risultati che si presuppongono noti, e che non sono esattamente elementari.

In effetti, occorre conoscere il concetto di complemento ortogonale, e le sue proprietà di somme dirette. Verremo adempiuti per completezza.

DEFINIZIONE: Detto uno spazio euclideo  $X$ , ed un suo sottospazio  $Y$ , si definisce il complemento ortogonale di  $Y$  in  $X$  come l'insieme

$$Y^\perp = \{x \in X : xy = 0 \quad \forall y \in Y\}$$

Si riconosce subito che  $Y^\perp$  è un sotto-  
spazio di  $X$  e, con pace fatta, si  
dimostra che, per il teorema delle proie-  
zioni,

$$X = Y \oplus Y^\perp,$$

da cui segue subito

$$\dim X = \dim Y + \dim Y^\perp$$

Tali risultati sono stati oggetto di altri  
contributi.

Altri risultati indispensabili per provare il  
teorema spettrale (per esteso: teoreme di esistenza  
di una base ortonormale di autovettori) sono  
il teorema di esistenza di autovettori (detto  
teorema degli spettri invarianti) e il lemma,  
immediato ma fondamentale, che prove che i  
complementi ortogonali di un autovettore di  $A$   
sono invarianti, ossia mutano in sé dell'operatore  
 $A$ . Tutto ciò, e in special modo il teorema  
di esistenza degli autovettori, punto molto delicato,

Ricordi ed numerosi presupposti. Fatta tale  
debole premessa, la dimostrazione può  
essere ottenuta facilmente per induzione.

### TEOREMA SPETTRALE COMPLESSO :

Sia  $A : X \rightarrow X$  lineare e autoaggiunto,  
con  $X$  spazio euclideo COMPLESSO di dimensione finita (non nullo).

Allora, esiste una base ortonormale di  $X$  formata da autovettori di  $A$  (o base spettrale).

DIM. (per induzione sulla dimensione di  $X$ ).

Il teorema è vero se  $\dim X = 1$ . Infatti, per il teorema d'esistenza degli autovettori, esiste  $v \in X$  autovettore di  $A$ , da cui segue  $v \neq 0$ . Per il teorema del generatore  $X = \langle v \rangle$ , e la base ortonormale richiesta è  $\{v/|v|\}$ .

Supponiamo ora che la tesi sia vera per tutti gli spazi di dimensione  $n$ , e proviamo per quelli di dimensione  $n+1$ . Dunque, sia

$\dim X = n+1$ , con  $n > 0$ , poiché il caso  $n=0$  corrisponde al caso  $\dim X = n+1 = 1$ , già considerato. Come prima, sia  $v$  un autovettore di  $A$  in  $X$ , che esiste per il teorema d'esistenza, e si pone

$$W = \langle v \rangle^\perp$$

Per la proprietà delle somme dirette prime richiamate s'ha

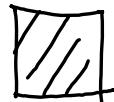
$\dim X = \dim \langle v \rangle + \dim W$ ,  
e, poiché  $\dim \langle v \rangle = 1$ , ne segue  $\dim W = n$ . Poiché  $A$  è autoaggiunto, da  $wu = 0$  segue subito

$A(w)u = 0$ , e dunque  $A: W \rightarrow W$ . Poiché  $\dim W = n > 0$ , si può applicare ad  $A: W \rightarrow W$  l'ipotesi induttiva, ed esiste una base ortonormale di autovettori di  $A$  in  $W$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Per definizione di  $W$ ,  $v_i$  è ortogonale ad ogni  $v_j$  e dunque

$$v_1, \dots, v_n, v/v\|$$

è un insieme di autovettori di  $A$  ortogonalmente e quindi indipendente. Essendo essi  $n+1$  ( $\dim X$ ) vettori indipendenti, per il teorema del

generale, formano un base di  $X$ . Essendo tutti autovettori d'  $A$  ed essendo un sistema ortogonale, la tesi è provata.



Note: tutti i risultati utilizzati nelle dimostrazione sono stati presentati altrove. In particolare:

- $\dim X \oplus Y = \dim X + \dim Y$  (AL-3.2)
- $X = Y \oplus Y^\perp$  (AL-2.4, pag. 8)
- Se  $A$  è autoaggiunto e  $u$  è un autovettore d'  $A$ , allora  $wu=0 \Rightarrow A(w)u=0$  (AL.7.1)
- Se  $A : X \rightarrow X$ ,  $X$  spazio vettoriale complesso di dimensione finita (non nullo), allora esistono  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $u \in X$  tali che  $A(u) = \lambda u$  e  $u \neq 0$  (AL-7.1)