# IL TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI AUTOAGGIUNTI SU SPAZI EUCLIDEI COMPLESSI

---

Il teorema spettrale, nel caso autoaggiunto complesso, è basato sui seguenti risultati, già provati in precedenza:

**LEMMA**: Se $u$ è un autovettore di $A$, cioè

$$A(u) = \lambda u \qquad u \neq 0,$$

e $A$ è autoaggiunto, se $w \cdot u = 0$, allora $A(w) \cdot u = 0$

In sostanza, il complemento ortogonale di un autovettore $u$ di $A$ è invariante per $A$. Vale inoltre il seguente

**TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI AUTOVETTORI (O DEGLI SPAZI INVARIANTI)**: Sia $X$ uno spazio complesso di dimensione non nulla e sia $A: X \to X$ un operatore lineare da $X$ in sé. Allora $X$ contiene autovettori di $A$.

Si può allora provare il seguente

TEOREMA SPETTRALE (nel caso autoaggiunto complesso): Sia $X$ uno spazio euclideo complesso di dimensione non nulla. Sia $A: X \to X$ autoaggiunto, e cioè verificante per ogni $u, v \in X$

$$A(u)\,v = u\,A(v)$$

allora, esiste una base ortonormale di $X$, costituita da autovettori di $A$.

Si osservi che l'esistenza di una base spettrale per $A$ assicura che $A$ sia diagonalizzabile, la base rispetto alla quale la matrice associata risulta diagonale essendo costituita esattamente dalla base spettrale di autovettori e gli elementi diagonali della matrice essendo gli autovalori.

DIM.

Poiché $A: X \to X$, e $\dim X > 0$, per il teorema di esistenza degli autovettori esiste $u_1 \in X$ tale che

$$u_1 \neq 0 \quad e \quad A(u_1) = \lambda_1 u_1$$

Poiché $u_1 \neq 0$, e ogni multiplo di autovettore è un autovettore si può rimpiazzare $u_1$ con $\frac{u_1}{|u_1|}$, che è unversore.

Se è $X = \langle u_1 \rangle$, $u_1$ è la base di autovettori richiesta.
Se no, supponiamo di aver già scelto $u_1, u_2, .., u_k \in X$ sistema ortonormale di autovettori di $A$, e e scegliamo per induzione un autovettore $u_{k+1}$ di lunghezza $1$ e perpendicolare a tutti gli altri.

Se $k = n$, il sistema $u_1 — u_k$ è la base spettrale.
Se $k < n$ allora $\langle u_1 ... u_k \rangle \subset X$, per il teorema della dimensione, e dunque $\exists w \in X : w \notin \langle u_1 -- u_k \rangle \Rightarrow w - w_{\langle u_1 -- u_k \rangle} \neq 0$.

Posto allora $\tilde{w} = w - w_{\langle u_1 -- u_k \rangle}$ risulta per il teorema della proiezione, $\tilde{w} \perp u_i \ \forall i = 1..k$ e dunque, posto

$$W = \{ w \in X : w u_i = 0 \ \forall i = 1..k \}$$

risulta che $W$ (complemento ortogonale di $\langle u_1, \dots u_k \rangle$) contiene almeno il vettore non nullo $\tilde{w}$ e dunque

$$\dim W > 0.$$

Per il lemma precedente, $w \in W \iff w\, u_i = 0 \quad \forall i = 1..k$

$\Rightarrow A(w)\, u_i = 0 \quad \forall i = 1..k \iff A(w) \in W$

e dunque $W$ è invariante per $A$.

Per il teorema d'esistenza già citato (degli spazi invarianti), esisterà un autovettore di $A$ in $W$, e sia $v \neq 0$. Poiché $v \in W$, ne segue che è ortogonale a $u_1, u_2, \dots u_k$. Dividendolo per la propria norma si otterrà un autovettore unitario di $A$ ortogonale a quelli già scelti.

Dopo $n$ passi si sarà ottenuta la base suddetta $u_1 \dots u_n$, in quanto tali autovettori, a due a due ortogonali, sono per tale ragione indipendenti e quindi (per il teorema dei generatori) essendo $n$ sono una base per $X$.