SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI

(9/XII/2019)

Alcune delle applicazioni più interessanti della Algebra Lineare sono storicamente precedenti la sua apparizione nel panorama della Matematica. Fra di esse spicca la teoria dei sistemi di equazioni differenziali lineari, la cui forma esplicita scalare è

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{1i}(t)\, x_i(t) + f_1(t) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = A_{ni}(t)\, x_i(t) + f_n(t) \end{cases}$$

o, in forma vettoriale

$$\dot{x} = A(t)\, x(t) + f(t)$$

dove $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice che può dipendere da t, $x, \dot{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sono la funzione incognita e la sua derivata prima, definita da

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\bullet} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix},$$

ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è una funzione nota: la colonna dei termini noti scalari.

Se si assume che le funzioni $t \to A_{ij}(t)$ siano continue su $\mathbb{R}$, si può ottenere (con notevole fatica) il seguente teorema fondamentale

TEOREMA (di esistenza e unicità per il problema di Cauchy):

Per ogni $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ continua (cioè tale che $A_{ij}(t)$ è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ per ogni $i,j = 1..n$), ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua (cioè tale che $f_i(t)$ è in $C^0(\mathbb{R})$), ogni $t \in \mathbb{R}$, ed ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha una soluzione <u>unica</u> $t \to x(t)$, di classe $C^1(\mathbb{R})$, nel senso che ogni sua componente $x_i(t)$ è continua con le sue derivate prima su tutto $\mathbb{R}$.

Notiamo esplicitamente che, se due soluzioni dell'equazione vettoriale $\dot{x} = Ax + f$ assumono lo stesso valore x_0 in un certo istante t_0, allora coincidono in ogni $t \in \mathbb{R}$, per effetto dell'unicità.

Utilizzeremo tale proprietà per provare un primo risultato riguardante il caso omogeneo, cioè il caso nel quale $f \equiv 0$.

<u>TEOREMA</u>: L'insieme delle soluzioni dell'equazione $\dot{x} = Ax$ è un sottospazio

di $C^1(\mathbb{R})$ di dimensione n.

DIM. Dalla linearità della derivata e da quella dell'operatore $\mathcal{A}(u) = Au$ segue subito che, se x e y sono due soluzioni di $\dot{x} = Ax$, da $\dot{x} = Ax$ e $\dot{y} = Ay$ segue $(x+y)^{\circ} = Ax + Ay = A(x+y)$ e $(\alpha x)^{\circ} = \alpha Ax = A(\alpha x)$ e dunque le soluzioni di $\dot{x} = Ax$ formano un sottospazio vettoriale di $C^1(\mathbb{R})$.
Per provare che è di dimensione n, occorre costruirne una base costituita da n soluzioni.
Si considerino dunque le soluzioni $u_1, \dots, u_n$ dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}_i = Au_i \\ u_i(0) = e_i, \end{cases}$$

ove $e_1 \dots e_n$ è la base canonica in $\mathbb{R}^n$, che esistono (e sono uniche) per il teorema precedente.
Proviamo ora che $u_1 \dots u_n$ generano qualunque soluzione e sono indipendenti.
Infatti, sia w una soluzione arbitraria di

$\dot{x}=Ax$ e sia $w_0=w(0)\in\mathbb{R}^n$. Siano inoltre α_i: $w_0=\sum\alpha_i e_i$, e si ponga $z(t)=\sum_1^n\alpha_i u_i(t)$. Per quanto visto più su, z è combinazione di soluzioni e, quindi, è soluzione di $\dot{x}=Ax$. Inoltre $z(0)=\sum_1^n\alpha_i u_i(0)=\sum_1^n\alpha_i e_i=w_0$.

Ne segue allora che w e z sono due soluzioni del problema

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax\\ x(0)=w_0\end{cases}$$

e, pertanto, coincidono su tutto $\mathbb{R}$. Dunque $w=z=\sum_1^n\alpha_i u_i(t)\in\langle u_1,\dots,u_n\rangle$, ed ogni soluzione z è generata da $\{u_1,\dots,u_n\}$.

Per provare l'indipendenza di $u_1\dots u_n$, siano β_i tali che $\sum_1^n\beta_i u_i\equiv 0$. Ne segue allora

$$0=\sum_1^n\beta_i u_i(0)=\sum_1^n\beta_i e_i$$

e, dall'indipendenza di $e_1\dots e_n$, segue $\beta_i=0$ $\forall i$.

Dunque, $\{u_1, \dots, u_n\}$ è la base cercata.

$\boxed{\checkmark}$

Il ragionamento svolto più su suggerisce un <u>test di indipendenza lineare</u> per le soluzioni di un'equazione vettoriale $\dot{x} = Ax$: n soluzioni $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti in $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se lo sono i loro valori in un qualsiasi istante t_0. Ad esempio, l'equazione scalare $\ddot{x} = -x$, quella dell'oscillatore armonico, è equivalente, dopo aver posto $y_1 = x$ e $y_2 = \dot{x}$ al sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla teoria precedente, lo spazio delle soluzioni deve avere dimensione due. Osservando che $\cos t$ e $\sin t$ risolvono $\ddot{x} = -x$, ne segue che

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

sono due soluzioni del sistema $\dot{y} = Ay$.
Sono indipendenti in $C^1(\mathbb{R})$ perché, calcolate in $t=0$ diventano $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, sistema notoriamente indipendente.
Dunque ogni soluzione di $\ddot{x} = -x$ è combinazione lineare di $\cos t$ e $\sin t$.

Ciò consente di risolvere il problema di Cauchy $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = x_0$ per ogni t_0 e ogni x_0.
Ad esempio, la soluzione di $\ddot{x} = -x$ $x(0) = 1$ non è unica in quanto $\cos t + \alpha \sin t$ verifica tanto l'equazione quanto la condizione iniziale $x(0) = 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Se però si richiede anche che, per $t=0$, la posizione sia $x(0) = 1$ e la velocità in quel punto e in quell'istante sia $\dot{x}(0) = 0$, allora

$$1 = x(0) = (\alpha \cos t + \beta \sin t)_{t=0} = \alpha$$

$$0 = \dot{x}(0) = (-\alpha \sin t + \beta \cos t) = \beta$$

da cui la soluzione (unica) è

$$x(t) = \cos t \, ,$$

che descrive il comportamento di una massa ad un estremo di una molla che ha l'altro estremo fisso, distesa fino a distanza 1 e abbandonata (senza alcun impulso) nell'istante $t=0$.

Se invece si dà una martellata ad un peso immobile nella posizione di equilibrio di un pendolo all'istante $t=0$ $(x(0)=0)$ trasmettendo un impulso sufficiente a conferirgli la velocità 2. $(\dot{x}(0)=1)$ si otterrebbe la soluzione

$$x(t) = 2 \sin t .$$

NOTA (determinante di Wronskij o wronskijano).

La base canonica non riveste alcun ruolo particolare nella dimostrazione precedente. Ne segue che, se $u_1 \dots u_n$ sono soluzioni arbitrarie di $\dot{x} = Ax$, esse generano tutte le altre se e solo se sono indipendenti in un qualunque punto t_0, cioè se

$$\det\big(u_1(t_0), \dots, u_n(t_0)\big) \neq 0$$

Il determinante

$$\det\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$$

è detto il Wronskijano delle soluzioni $u_1 \dots u_n$.

Nell'esempio precedente, il wronskijano delle due soluzioni $(\cos t, -\sin t)$ e $(\sin t, \cos t)$ è

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

il che garantisce l'indipendenza in ogni punto direttamente.

ATTENZIONE: il fatto che l'indipendenza in qualsiasi punto t_0 implichi quella in tutti gli altri è un effetto del teorema di unicità delle soluzioni di $\dot{x} = Ax$. Non attendersi lo stesso comportamento per un generico sistema di n funzioni in $C^1(\mathbb{R})$.

SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Un caso di grande importanza è quello in cui la matrice A è costante.
In tal caso, grazie alla teoria spettrale, si può estendere ai sistemi la teoria delle equazioni scalari $\dot{x} = \alpha x$, che hanno come soluzioni gli esponenziali $x(t) = e^{\alpha t}$.

Si può infatti dimostrare che

$$x(t) = \sum_0^{\infty} \frac{t^k A^k x_0}{k!} \doteq e^{tA} x_0$$

risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

È necessaria qualche spiegazione! Innanzi tutto, si pone

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ volte}} \quad e \quad A^0 = I$$

Poiché $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si ha subito che $A^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n, \dots$

Un punto molto più delicato è quello di precisare cosa si intende per $\sum_0^\infty \frac{t^k}{k!} A^k x_0$

Notiamo che $I x_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $A^{k+1} = A(A^k x_0)$ da cui $A^k x_0 \in \mathbb{R}^n$. E' possibile estendere ai vettori la teoria delle serie numeriche. Si pone $W(t) = \sum_0^\infty \frac{t^k}{k!} A^k x_0$ se e solo se

$$\lim_m \left| W(t) - \sum_1^m \frac{t^k}{k!} A^k x_0 \right| = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora la sommatoria è finita ed è una combinazione di vettori di $\mathbb{R}^n$.
Grazie alla crescita rapidissima di $k!$,

si può provare che, per qualunque $t \in \mathbb{R}$, anche molto grande, i termini di grado elevato sono molto piccoli e il risultato della somma finita si stabilizza intorno ad un vettore $w(t)$ che definisce

$$w(t) = e^{tA} x_0$$

Considerazioni non banali consentono di provare che w è derivabile per ogni t e $w' = Aw$; inoltre è immediato verificare che

$$w(0) = x_0$$

Il vantaggio offerto dall'esponenziale di matrice non è tale da indurre all'entusiasmo: per calcolarlo occorre prima calcolare $A^2, A^3, \ldots,$ e poi calcolare il limite delle somme parziali. Proibitivo!

Oltre ad altre scorciatoie (Teorema di Hamilton - Cayley) ce n'è una notevole:

"Cosa accade alla serie $e^{tA} x_0$ se x_0 è un autovettore di A?"

Sia dunque $x_0 \neq 0$ e $A x_0 = \lambda x_0$, da cui

$$A^2 x_0 = A(A x_0) = A(\lambda x_0) = \lambda A(x_0) = \lambda^2 x_0$$

e, similmente, $A^k x_0 = \lambda^k x_0$, da cui infine

$$e^{tA} x_0 =$$

$$= I x_0 + tA x_0 + \frac{t^2}{2} A^2 x_0 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k x_0 + \dots =$$

$$= x_0 + t\lambda x_0 + \frac{(t\lambda)^2}{2} x_0 + \dots + \frac{t^k \lambda^k}{k!} x_0 + \dots =$$

$$= \left(1 + t\lambda + \frac{(t\lambda)^2}{2} + \dots + \frac{(t\lambda)^k}{k!} + \dots\right) x_0 = e^{\lambda t} x_0$$

È dunque semplicissimo scrivere l'esponenziale di una matrice se il dato iniziale è un autovettore e λ è il corrispondente autovalore, ma come si potrà procedere se x_0 NON è un autovettore di A?

Una risposta altrettanto semplice proviene dalla teoria sviluppata nel capitolo precedente, almeno in alcuni casi.

Se, infatti, A è diagonalizzabile, esiste una base spettrale; siano $u_1 .. u_n$ autovettori di A relativi agli autovalori $\lambda_1 .. \lambda_n$ (eventualmente coincidenti), tali che $u_1 .. u_n$ generino $\mathbb{R}^n$.
In tal caso, come visto nel capitolo precedente con la base canonica, le soluzioni

$$e^{\lambda_1 t} u_1, \; e^{\lambda_2 t} u_2, \; \dots, \; e^{\lambda_n t} u_n$$

sono una base dell'insieme delle soluzioni di $\dot{x} = Ax$, e per risolvere

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

basta determinare $\alpha_1 .. \alpha_n$ tali che

$$x_0 = \sum \alpha_i u_i$$

e porre

$$x(t) = \sum_1^n \alpha_i e^{\lambda_i t} u_i$$

Poiché $x(0) = x_0$, per l'unicità, $x(t)$ è la soluzione.

Se A non è diagonalizzabile, la cosa non è così immediata, ma è comunque possibile estendere tale approccio anche a questo caso (vedi "Forma canonica di Jordan" ed "esponenziale di matrici").

Esempio: determinare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

verificante le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

In forma vettoriale, il sistema diventa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot}}_{\dot{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{z}$$

ove A è certamente diagonalizzabile, essendo simmetrica. L'equazione caratteristica è =

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

I due autovalori sono $\lambda = 2 \pm \sqrt{4-3}$ e dunque A ha autovalori (semplici) $1, 3$.

Determiniamo una base spettrale.

$\boxed{\lambda = 1}$
$$\begin{array}{cc|c} u_1 & u_2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad u_2 = -u_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 3}$
$$\begin{array}{cc|c} \hline -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \qquad u_2 = u_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è la base richiesta.

Le soluzioni corrispondenti sono $e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Scriviamo ora il dato iniziale $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ come combinazione degli autovettori trovati.

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \quad \text{da cui} \quad \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{array} \quad \text{e cioè}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_1} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\alpha_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2}$$

La soluzione cercata è, dunque

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha_1} e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\alpha_2} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{t} + \frac{3}{2} e^{3t} \\ -\frac{1}{2} e^{t} + \frac{3}{2} e^{3t} \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Un caso particolare di matrice non diagonalizzabili per cui è facile calcolare l'esponenziale, e che è di grande importanza nella teoria della forma canonica di Jordan è

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

introdotta in precedenza come esempio di matrice non diagonalizzabile. Si ha

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

È molto sgradevole, ma il prodotto di matrici (come il prodotto scalare, da cui deriva) non verifica la legge di annullamento del prodotto. Nel nostro caso, è una benedizione, perché

$$A^0=I \qquad A^1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad A^k=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \quad \forall k>1$$

ed è dunque semplicissimo calcolare

l'esponenziale $e^{tA}x_0$. Infatti

$$e^{tA}x_0 = x_0 + tAx_0 = (1+tA)x_0 \quad \forall x_0$$

senza altri termini, perché contenenti potenze di A nulle.

Una matrice A si dice <u>NILPOTENTE</u> se qualche sua potenza si annulla.

L'esempio presentato ora è il caso più semplice di tutti altri aventi la seguente struttura:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

zeri sulla diagonale e sotto d'essa

1 immediatamente sopra la diagonale

zeri sopra i termini uguali ad 1.

Esempi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tali matrici sono tutte nilpotenti in questo $A^n = 0$.
La serie esponenziale contiene dunque solo un numero finito di termini e, invece di un esponenziale di matrici è un polinomio di matrici.

Sappiamo che non tutte le matrici si possono rendere diagonali cambiando base, ma il teorema della forma canonica di Jordan ci assicura che <u>OGNI MATRICE PUO' ESSERE SCRITTA COME SOMMA DI UNA MATRICE DIAGONALE E DI UNA NILPOTENTE</u> (e quindi il calcolo dell'esponenziale non è poi così drammatico come appariva, con ragione, all'inizio) scegliendo una base opportuna.

UN CENNO AL TEOREMA DI HAMILTON-CAYLEY.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e sia $p(\lambda) = \sum_0^n \alpha_i \lambda^i$ il suo polinomio caratteristico.

Il teorema di Hamilton-Cayley assicura che

$$\sum_0^n \alpha_i A^i = 0$$

Ci limitiamo ad osservare che l'equazione precedente, risolta rispetto ad A^n, permette di esprimerla in funzione delle potenze più basse, con un minor numero di operazioni rispetto a quelle di $(A^{n-1})A$.

Non è gran cosa, ma può rivelarsi utile.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Un libro molto bello sull'argomento è quello di Vladimir Arnold sulle equazioni differenziali ordinarie, credo tradotto anche in italiano. Di sicuro è tradotto in francese (la mia copia, ediz. MIR). Per un'edizione in inglese (che tanto, prima o poi, va imparato!), si può pensare a:

Aut.: VLADIMIR ARNOLD

Tit.: ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Editore: SPRINGER VERLAG