STUDIO DEL SEGNO DELLE FORME QUADRATICHE.

(6/XII/2019)

Una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ è un polinomio omogeneo di secondo grado

$$H(x) = \sum_{1}^{n} A_{ij} x_i x_j \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Il problema oggetto di queste note è quello di studiarne il segno.
Tale studio è semplicissimo se la matrice A è diagonale, e cioè se

$$H(x) = \sum_{1}^{n} A_{ii} x_i^2$$

Infatti, detti $\lambda = \min_i A_{ii}$ e $\Lambda = \max_i A_{ii}$ si ha

$$\lambda |x|^2 \leq H(x) \leq \Lambda |x|^2$$

Se $e_1 \dots e_n$ è la base canonica, ne segue

$$H(e_i) = A_{ii}$$

e si ha subito:

1) se $\lambda > 0$, $H(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
2) se $\Lambda < 0$, $H(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$
3) se $\lambda = 0$, $H(x) \geq 0$
4) se $\Lambda = 0$, $H(x) \leq 0$
5) se $\lambda < 0$ e $\Lambda > 0$, H cambia segno.

Lo studio, nel caso generale, si può ricondurre a questo, grazie alla teoria spettrale.
Una prima osservazione utilissima (avendo in mente di diagonalizzare). Posto

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$$

risulta

$$B_{ij} = B_{ji}$$

e, poiché $x_i x_j = x_j x_i$, si ha anche

$$H(x) = A_{ij} x_i x_j = B_{ij} x_i x_j$$

Il vantaggio, decisivo nel seguito, di tale "travestimento", è che B_{ij} è diagonalizzabile in quanto simmetrica, ed ha quindi una base spettrale ortonormale, con autovalori tutti reali, eventualmente coincidenti.
Immaginiamo di avere già trasformato la matrice originale A_{ij} nella forma B_{ij} che chiameremo ancora A_{ij}. Ad esempio

$$H(x,y,z) = x^2 + 2xy - 2yz + z^2$$

corrisponde alla matrice (originale)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\frac{1}{2} A_{ij} + \frac{1}{2} A_{ji}$ è invece

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

simmetrica, che sarebbe associata alla forma

$$x^2 + \underbrace{xy + yx}_{2xy} \underbrace{- yz - zy}_{-2yz} + z^2 = H(x,y,z)$$

Dunque ogni forma quadratica è generata da una matrice simmetrica, fra (molte) altre.

Il passo successivo è di vedere come cambia tale matrice quando si passi dalla base canonica ad una base spettrale ortonormale, $u_1 \dots u_n$, che esiste per il teorema spettrale reale (applicabile alle matrici simmetriche).

Si ha, detta M la matrice di cambio di base da $e_1 \dots e_n$, base canonica, ad $u_1 \dots u_n$, base spettrale, e detti $x_1 \dots x_n$ e $x'_1 \dots x'_n$ le coordinate di x rispetto a $\{e_1 \dots e_n\}$ e $\{u_1 \dots u_n\}$, risulta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

ossia, impiegando la convenzione di Einstein, $x_i = M_{ij} x'_j$. Ne segue

$$H(x) = A_{ij}\, x_i x_j = A_{ij}\, M_{ih} x'_h\, M_{jk} x'_k =$$

$$= M^*_{hi} A_{ij} M_{jk}\, x'_h x'_k =$$

$$= (M^* A M)_{hk}\, x'_h x'_k$$

Poiché le colonne di M sono un sistema orto normale per il teorema spettrale, segue direttamente che

$$M^* M = I$$

e dunque

$$M^* = M^{-1}$$

da cui, infine,

$$A_{ij}\, x_i x_j = (M^{-1} A M)_{hk}\, x'_h x'_k .$$

Poiché

$$(M^{-1} A M) e_i = M^{-1} A u_i =$$

$$= M^{-1} \lambda_i u_i = \lambda_i e_i$$

si ha che $M^{-1}AM$ è diagonale, con gli autovalori di A sulla diagonale.

Si può dunque completare lo studio come in precedenza, ottenendo

$$\lambda \sum x_i'^2 \le \sum \lambda_i x_i'^2 = H(x) \le \Lambda \sum x_i'^2 \quad (*)$$

ove λ e Λ sono il minimo e il massimo autovalore di A.

Un'ultima nota: $\boxed{\sum x_i'^2 = \sum x_i^2}$. Infatti

$$|x|^2 = x_i x_i = M_{ih} x_h' M_{ik} x_k' =$$

$$= M_{hi}^* M_{ik} x_h' x_k' = M_{hi}^{-1} M_{ik} x_h' x_k' =$$

$$= I_{hk} x_h' x_k' = x_h' x_h'$$

da cui infine, per $(*)$, si ha

$$\boxed{\lambda |x|^2 \le H(x) \le \Lambda |x|^2} \quad (**)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Poiché $H(x) = A_{ij} x_i x_j = (M^{-1}AM)_{hk} x'_h x'_k$, e poiché il vettore di coordinate

$$x'_1 = 0 \;\ldots\; x'_{i-1} = 0 \quad x_i = 1 \quad x'_{i+1} = 0 \;\ldots\; x'_n = 0$$

è l'autovettore u_i, in quanto $u_i = x_j u_j$, si ha

$$H(u_i) = \lambda_i$$

ove λ_i è l'autovalore relativo a u_i, di norma 1.

<u>DUNQUE</u>: lo studio del segno di una forma quadratica è ridotto allo studio del segno degli autovalori della matrice (resa simmetrica) che la definisce che, per il teorema spettrale reale, è diagonalizzabile con autovalori tutti reali.

È notevole il fatto che <u>NON</u> occorra conoscere gli autovalori, ma solo il loro segno! Può apparire una distinzione bizantina, ma ci sono almeno due tecniche per determinare il segno degli autovalori senza calcolarli, illustrate in AL_1.1 e AL_7.1, piuttosto efficienti.

Introduciamo la terminologia tradizionale:

1) H si dice DEFINITA POSITIVA se
$\lambda > 0$ (tutti gli autovalori strettamente positivi)

2) H si dice DEFINITA NEGATIVA se
$\Lambda < 0$ (tutti gli autovalori strettamente negativi)

3) H si dice SEMIDEFINITA POSITIVA se
$\lambda = 0$ (autovalore 0, e gli altri positivi)

4) H si dice SEMIDEFINITA NEGATIVA se
$\Lambda = 0$ (autovalore 0, e gli altri negativi)

5) H si dice INDEFINITA se
$\lambda < 0$ e $\Lambda > 0$ (ci sono autovalori discordi)

In ogni caso, risulta $H(0) = 0$. Nei casi 3), 4) e 5), inoltre, esistono $x \neq 0$ per cui $H(x) = 0$. Infatti, nei casi 3) e 4) c'è l'autovalore nullo, e H si annulla sul corrispondente autospazio. Nel caso 5), detti u_i e u_j due autovettori di norma 1 relativi a λ e Λ, rispettivamente, da (*) segue

$$H(u_i) = \lambda \quad \text{e} \quad H(u_j) = \Lambda .$$

Posto allora $\tilde{u} = \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\, u_i$, e $\tilde{v} = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda}}\, u_j$

si osserva subito che $(\tilde{u} + \tilde{u})_i = \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$, $(\tilde{u} + \tilde{v})_j = \dfrac{1}{|\Lambda|}$ e $(\tilde{u} + \tilde{v})_h = 0$ per $h \neq i, j$ da cui, per (*) segue

$$H(\tilde{u} + \tilde{v}) = -1 + 1 = 0 . \qquad \blacksquare$$

I modelli più semplici di forme quadratiche sono legati alle coniche in forma canonica:

$2x^2 + y^2$ è definita positiva: $\lambda = 1$ $\Lambda = 2$

$-x^2 - y^2$ è definita negativa: $\lambda = \Lambda = -1$ doppio

$2x^2$ è semidefinita positiva: $\lambda = 0$ $\Lambda = 2$

$-y^2$ è semidefinita negativa: $\lambda = -1$ $\Lambda = 0$

$x^2 - y^2$ è indefinita: $\lambda = -1$ $\Lambda = 1$

Le matrici corrispondenti sono tutte diagonali!

Una delle forme quadratiche più importanti è il quadrato della norma. I due assiomi del prodotto scalare

$$xx \geq 0 \qquad e \qquad xx = 0 \iff x = 0$$

assicurano che $H(x) = xx$ è <u>definita positiva</u>.

APPENDICE: UNA VERSIONE "LEGGERA" DEL TEOREMA DI SYLVESTER PER LE FORME QUADRATICHE.

Nei discorsi precedenti abbiamo osservato che

$$H(x) = A_{ij} x_i x_j = (M^* A M)_{hk} x'_h x'_k$$

dove $x_p = M_{pq} x'_q$, M invertibile arbitraria.

Se si riesce a trovare una matrice M per cui $M^* A M$ è diagonale, lo studio del segno di $A_{ij} x_i x_j$ è ricondotto a quello di $\lambda_i x_i'^2$, che è immediato.

Un modo ragionevolmente semplice per determinare la matrice $M^* A M$ è di applicare l'algoritmo di Gauss-Jordan in modo opportuno: basta, per ogni operazione sulle righe (corrispondente a moltiplicare da sinistra per una matrice M_1), applicare subito la stessa operazione alle colonne (che equivale a moltiplicare da destra per M_1^*). L'intero procedimento di riduzione alla forma diagonale rimpiazza dunque la matrice originale A con

$$M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A M_1^* M_2^* \cdots M_n^* =$$
$$= (M_n \cdots M_1) A (M_n \cdots M_1)^*.$$

Posto allora $M = (M_n \cdots M_1)^*$, che M è invertibile perché tali sono tutte le M_i, la matrice diagonale così ottenuta è $M^* A M$. Dunque, la forma quadratica da essa definita ha lo stesso segno di quella originale, in quanto esse coincidono nei punti corrispondenti per il cambio di coordinate definito da M. (Per dettagli ed esempi, vedi AL_1.1)

<u>NOTA</u> (<u>CAVEAT</u>!): non c'è <u>nessuna</u> <u>ragione</u> perché M debba essere una MATRICE ORTOGONALE, cioè a colonne ORTONORMALI. Ne segue che, in generale, $M^* \neq M^{-1}$, e dunque non c'è motivo per cui sulla diagonale ci debbano essere gli autovalori di A.

Ciononostante, il segno della forma quadratica può essere studiato sulla base dei SEGNI dei numeri sulla diagonale. In effetti, il teorema di Sylvester, nella sua forma originale, ci assicura che il numero di autovalori nulli, positivi e negativi è uguale al numero di valori nulli, positivi e negativi sulla diagonale della matrice (diagonale) M^*AM prima ottenuta. Anche senza tale raffinamento, comunque, resta il fatto che il segno della forma quadratica originale è uguale a quello della forma diagonale

$$(M^*AM)_{hk}\, x'_h\, x'_k$$

che dipende dal segno del massimo e del minimo dei valori che appaiono sulla sua diagonale (e NON dei loro valori assoluti), come visto prima. Il vantaggio decisivo di tale metodo è che non richiede di calcolare neppure il polinomio caratteristico, che è un determinante e che, di conseguenza, si complica enormemente al crescere della dimensione di A, il che è necessario per poter usare la regola dei segni di Cartesio.

<u>NOTA</u>: è facile verificare che, se A è simmetrica, anche $M^* A M$ lo è. Infatti, da $(M^*)^* = M$ segue

$$(M^* A M)^* = M^* A^* (M^*)^* = M^* A M$$

in quanto $A^* = A$, perché simmetrica reale.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Qualcosa sulle forme quadratiche astratte è reperibile in altro contributo (AL_7.1), assieme ad un'applicazione alla classificazione delle coniche.

Lo studio del segno degli autovalori, senza calcolarli, è reperibile in fondo alla dispensa sull'algoritmo di Gauss (AL_1.1), per quanto attiene al teorema di Sylvester, mentre la regola dei segni di Cartesio, "leggera", si trova in fondo alla dispensa AL_7.1.

Due delle applicazioni più importanti si trovano nella dinamica dei corpi in rotazione (assi principali d'inerzia) e nello studio dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili (forma Hessiana), reperibili su qualunque libro di Meccanica Razionale o di Analisi II, rispettivamente.