SOMMA DIRETTA

Titolo nota 02/06/2012

Lo scopo di questa nota è di definire e studiare la somma diretta di un numero finito di sottospazi di uno spazio vettoriale.

DEFINIZIONE: Sia X uno spazio vettoriale e siano X_i, $i=1..n$, n suoi sottospazi. Posto

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \; : \; x_i \in X_i \right\}$$

il loro sottospazio somma, si dirà che tale somma è diretta, e si scriverà

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$$

se e solo se per ogni $x_i, x_i' \in X_i$, $i=1..n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \implies x_i = x_i' \quad i=1..n$$

Si prova subito il seguente criterio, più agile.

LEMMA (Criterio perché una somma sia diretta)

Condizione necessaria e sufficiente perché $\sum_{i=1}^{n} X_i = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ è che per ogni $x_i \in X_i$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies x_i = 0 \quad i=1..n$$

DIM.

(C.N.) Siano $x_i \in X_i$ tali che $\sum_1^n x_i = 0$

Poiché $0 \in X_i$ $\forall i$, e $\sum_1^n x_i = 0 = \sum_1^n 0$, dal fatto che la somma è diretta segue che $x_i = 0$ $\forall i = 1..n$.

(C.S.) Siano $x_i, x_i' \in X_i$ tali che $\sum_1^n x_i = \sum_1 x_i'$. Ne segue che $\sum_1^n \underbrace{(x_i - x_i')}_{\in X_i} = 0$ e, dall'ipotesi, $x_i - x_i' = 0$ $i=1..n$. ∎

La somma diretta di spazi gode della seguente proprietà fondamentale:

TEOREMA: $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim X_i$

DIM.

Supponiamo inizialmente che tutti gli spazi X_i siano di dimensione finita e sia $u_1^i, \dots, u_{k_i}^i$ una base per X_i, $i=1..n$.

Verrà provato che (u_j^i), $i=1..n$, $j=1..k_i$ è una base per $\bigoplus_1^n X_i$, e dunque

$$\dim\left(\bigoplus_1^n X_i\right) = k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n \dim X_i$$

che è la tesi.

Sia dunque $x \in \bigoplus_1^n X_i$ e proviamo che $x \in \langle u_1^1, \dots, u_{k_1}^1, \dots, u_1^n, \dots u_{k_n}^n \rangle$.

Infatti, se $x \in \bigoplus_1^n X_i = \sum_{i=1}^n X_i$, esistevano $x_i \in X_i$ tali che $x = \sum_1^n x_i$. Poiché $u_1^i, \dots u_{k_i}^i$ è una base per X_i, esistevano α_j^i tali che

$$x_i = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j^i u_j^i$$

e infine

$$x = \sum_1^n x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j^i u_j^i$$

Dunque, x è combinazione lineare dei vettori di tutte le basi. Perché siano una base c'è da provare solo la loro indipendenza.

Siano dunque λ_j^i tali che

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i u_j^i}_{\in X_i} = 0$$

Poiché $\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i u_j^i = x_i \in X_i$ e la somma è diretta, dal criterio provato prima segue che

$$\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i u_j^i = 0 \qquad \forall i=1..n$$

e dall'indipendenza di ciascuna delle basi $u_1^i..u_{k_i}^i$ di X_i segue infine

$$\lambda_j^i = 0 \qquad \forall i=1..n \quad \forall j=1..k_i$$

e quindi la tesi.

Nel caso in cui qualcuno degli X_i sia di dimensione infinita esso conterrà un numero arbitrario di vettori indipendenti. Per semplicità sia $i=1$. Allora, se $x \in X_1$ $x+0+0+..+0 \in \sum^n X_i$ e dunque $X_i \subseteq \sum_1^n X_i = \bigoplus_1^n X_i$ e dunque anche $\bigoplus_1^n X_i$ contiene un numero arbitrario di vettori indipendenti, ed è dunque anch'esso di dimensione infinita.

Un'interessante applicazione di tali concetti è oggetto del seguente

TEOREMA: Sia $A: X \to X$ un operatore da uno spazio di dimensione non nulla in sè.
Siano $\lambda_1 .. \lambda_k$ i suoi autovalori e $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_k}$ i relativi autospazi. Allora $\sum_1^k X_{\lambda_i} = \bigoplus_1^k X_{\lambda_i}$ e cioè la loro somma è diretta.

DIM. Siano $u_i \in X_{\lambda_i}$, $i=1..k$, tali che $\sum_{i=1}^{k} u_i = 0$

e proviamo, per assurdo, che $u_i = 0$ $\forall i = 1..k$. Supponiamo che

ciò sia falso, e siano $u_{i_1} \dots u_{i_h}$ i vettori non nulli per i quali

vale $\sum_{j=1}^{k} u_{i_j} = 0$. Poiché ognuno di essi è un

autovettore (essendo non nullo e appartenente all'autospazio

$X_{\lambda_{i_j}}$) ed è relativo ad un diverso autovalore λ_{i_j}, essi sono

indipendenti, e ciò è assurdo in quanto $\sum_{j=1}^{h} u_{i_j} = 0$

è una combinazione lineare nulla di vettori indipendenti

a coefficienti tutti uguali ad 1, e quindi non nulli.

$\blacksquare$

Dunque, la somma di autospazi è sempre diretta, in

conseguenza dell'importante teorema sull'indipendenza degli

autovettori in autospazi distinti e dunque

COROLLARIO: Nelle stesse ipotesi precedenti:

$$\dim \sum_{i=1}^{k} X_{\lambda_i} = \dim \bigoplus_{1}^{k} X_{\lambda_i} = \sum_{1}^{k} \dim X_{\lambda_i}$$

$\blacksquare$