I SISTEMI SCALA

I sistemi scala godono dell'importante proprietà che ogni sistema lineare può essere trasformato in uno scala mediante trasformazioni che non mutano l'insieme delle eventuali soluzioni, come le permutazioni di righe (e cioè di equazioni) o la somma ad un'equazione di un multiplo di un'altra, o che lo mutano in modo controllabile, come la permutazione di colonne, che equivale ad un cambio di nome alle incognite.

Questa nota intende presentare una versione semplificata della definizione di sistema (o matrice) scala, rinviando alle dispense sull'algoritmo di eliminazione per tutti gli altri dettagli.

La definizione seguente non esclude che il sistema possa avere righe di zeri o colonne di zeri, che debbono essere trattate come è esposto nelle dispense già citate. Ricordiamo esplicitamente solo che quanto segue riguarda i coefficienti delle incognite del sistema e non i suoi termini noti. Ovviamente se un'equazione ha tutti i coefficienti delle incognite nulli, allora sarà risolubile solo se il termine noto è zero, ma ciò non riguarderà la nota che segue: è già stato trattato nell'algoritmo di eliminazione. Ecco qui di seguito una definizione di sistema o matrice scala.

DEFINIZIONE: Sia a_{ij} la matrice $m \times n$ dei coefficienti di un sistema lineare:

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

Tale matrice, ed il sistema ad essa relativo, vengono detti SCALA se esiste una successione crescente di interi $k_i \le k_{i+1} \le n+1$, $i = 1, 2, \dots, m$ tali che

1) $k_i < k_{i+1}$ se $k_i < n+1$

2) $a_{ij} = 0$ se $j < k_i$

3) $a_{ij} \neq 0$ se $k_i \le j < k_{i+1}$

Gli elementi a_{ik_i}, con $k_i < n+1$, sono detti PIVOT.

In sostanza, k_i rappresenta l'indice di colonna del primo elemento non nullo di ogni riga. Tale indice cresce al crescere della riga sicché, scendendo verso il basso, il primo elemento non nullo si sposta verso destra, almeno di un'unità, sino a che non arrivi in fondo ($n+1$), dopo di che resta costante anche per tutte le righe seguenti, costituite anch'esse solo da zeri. Infine, tutti gli elementi su una riga che seguono il primo elemento non nullo, ma che hanno indice minore di quello della riga seguente (e cioè tutti gli elementi degli "scalini") devono essere non nulli, mentre nessuna ipotesi si fa per gli elementi che li seguono sulla loro stessa riga).

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \text{è scala: } k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad k_3 = 3$$

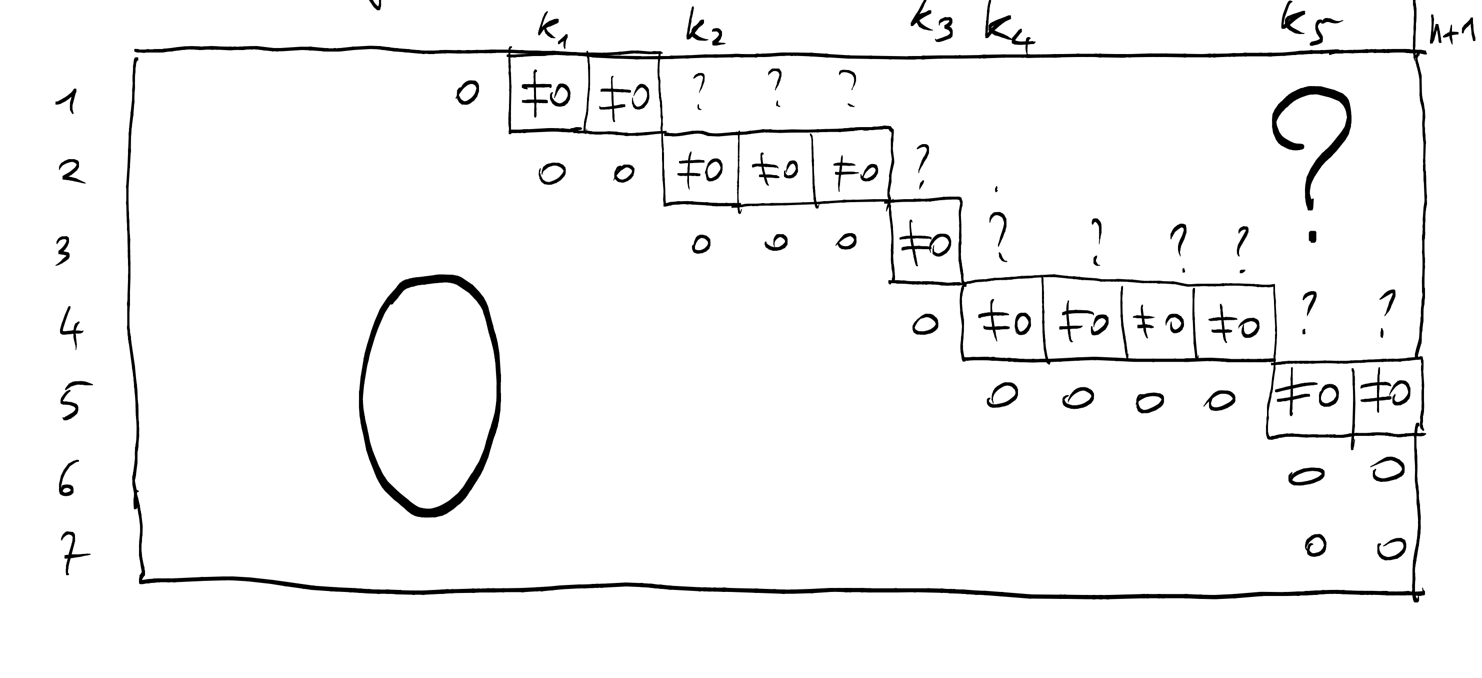
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \text{è scala: } k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad k_3 = 4 \ (= n+1)$$

$$a_{11} \neq 0 \quad a_{22} \neq 0 \quad a_{23} \neq 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \text{Non è scala, perché } k_2 = k_1 \text{ e non } k_2 > k_1$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \text{Non è scala, perché } k_2 = 4 \text{ mentre } k_3 = 3 < k_2$$

La struttura "grafica" di una matrice scala è



In tre parti: "Sulla scala, termini non nulli, sotto la scala, termini nulli, sopra la scala, termini arbitrari".

Le colonne non nulle possono essere precedute da un numero arbitrario di colonne formate da soli zeri. Analogamente le righe possono essere seguite da righe di soli zeri.

Notiamo esplicitamente che le righe fatte di soli zeri sono tutte e sole quelle per le quali $k_i = n+1$, e cioè quelle che <u>non</u> contengono elementi PIVOT. E' consuetudine di chiamare righe pivot e colonne pivot quelle che contengono gli elementi a_{ik_i}, e ugualmente di chiamare incognite pivot quelle corrispondenti nel sistema alle colonne pivot, x_{k_i}; le altre vengono spesso denominate "non pivot" (nome abbastanza disgustoso, ma sintetico). Alla luce del loro significato nell'algoritmo di Gauss avrebbe forse più senso chiamarle incognite "essenziali" e incognite "parametriche", ma l'ipotesi che $a_{ij} \neq 0$ se $k_i \leq j < k_{i+1}$ fa sì che una semplice permutazione di colonne possa rimpiazzare il pivot a_{ik_i} con uno qualunque degli a_{ij}, $k_i \leq j < k_{i+1}$, e dunque nella scelta delle incognite "essenziali" c'è un elemento di arbitrarietà, salvo che nel caso importante nel quale $k_{i+1} = k_i + 1$, che corrisponde alle matrici triangolari (o diagonali), per le quali non esistono incognite non pivot: ogni "scalino" contiene solo un elemento, e c'è dunque poco da scegliere!
Dunque, a parte il caso appena citato, la scelta delle incognite "essenziali" (e cioè pivot) NON è univoca come tale nome potrebbe lasciare intendere. Useremo i nomi disgustosi e, in un raro rigurgito di esterofilia, non li sostituiremo con la traduzione italiana (cardini, capisaldi ...), che andrebbe ugualmente bene!

NOTA: La stretta monotonia di k_i fino a che $k_i \leq n$ implica che $k_i \geq i$: k_1 è almeno 1; se k_1 vale $n+1$ allora $k_i = n+1 > i \; \forall i$; se no, $k_2 > k_1$ vale almeno $k_1 + 1 \geq 2$ e così via.

Ne segue che, se $m > n$ allora $m \geq n+1$ e dunque $k_i = n+1$ per ogni $i \geq n+1$, sicché esistono righe costituite solo da zeri (per le quali $k_i = n+1$).

Se invece $m < n$, poiché il massimo numero di pivot è m (uno per riga), ne segue che ci devono essere almeno $n-m$ colonne NON pivot. Naturalmente non si esclude che i pivot siano in numero minore, se ci sono righe costituite solo da zeri.