PROIEZIONI SU SOTTOSPAZI

Titolo nota 12/03/2012

Dato uno spazio euclideo X e un vettore $v \neq 0$, si può definire il vettore u_v, proiezione di u nella direzione di v, con notevoli proprietà che possono essere generalizzate.

Iniziamo con una definizione:

DEFINIZIONE Sia X uno spazio euclideo. Un insieme finito di vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$ si dice un **sistema ortogonale** se

1) $e_i e_j = 0$ per $i \neq j$

2) $e_i e_i \neq 0$ $\forall i = 1..n$

mentre si dirà **ortonormale** se, oltre ad essere ortogonale, verifica

$$e_i e_i = 1 \quad \forall i = 1..n$$

e cioè è formato da versori.

Il problema che verrà qui affrontato sarà quello di estendere la definizione di proiezione al caso dello span di un sistema di vettori.

DEFINIZIONE Sia X euclideo e siano $e_1 \dots e_n$ i vettori di un sistema ortogonale. Si pone allora:

$$u_{\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle} = \sum_{i=1}^{n} u_{e_i}$$

e si chiamerà proiezione di u sullo spazio generato da $e_1 \dots e_n$.

OSSERVAZIONE Si ha subito $u_{\langle v \rangle} = u_v$

La proiezione così definita gode della seguente proprietà.

TEOREMA (della proiezione):

Nelle condizioni della definizione precedente, risulta

$$\left(u - u_{\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle}\right) e_j = 0 \quad \forall j = 1..n$$

Dim. Si ha utilizzando la linearità del prodotto scalare,

$$\left(u - u_{\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle}\right) e_j = \left(u - \sum_{i=1}^{n} \frac{u e_i}{|e_i|^2} e_i\right) e_j =$$

$$= u e_j - \sum_{i=1}^{n} \frac{u e_i}{|e_i|^2} e_i e_j = \left(\text{poiché } e_i e_j = 0 \text{ se } i \neq j\right) = u e_j - \frac{u e_j}{|e_j|^2} e_j e_j = 0$$

$\blacksquare$

Tale proprietà di "ortogonalità del resto" ci assicura che il vettore $u - u_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}$ è ortogonale a tutti i vettori $e_1 \dots e_n$ e, dunque, anche a qualunque loro combinazione lineare. Infatti, posto

$$w = u - u_{\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle}$$

si ha

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right) w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i w = 0$$

Come è accaduto per la proiezione su un singolo vettore, ciò assicura che $u_{\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle}$ è l'elemento di $\langle e_1 \dots e_n \rangle$ di minima distanza da u ed ha norma minore di u.

$$|u|^2 = |u - u_{\langle e_1 \dots e_n \rangle} + u_{\langle e_1 \dots e_n \rangle}|^2 = |u - u_{\langle e_1 \dots e_n \rangle}|^2 + |u_{\langle e_1 \dots e_n \rangle}|^2 \geq$$

$$\geq |u_{\langle e_1 \dots e_n \rangle}|^2$$

ed anche

$$\Big|u - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\Big|^2 = \Big|\overbrace{u - \sum_{i=1}^n u_{e_i}}^{\text{ortogonale a } \langle e_1, \dots e_n \rangle} + \overbrace{\sum_{i=1}^n u_{e_i} - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i}^{\in \langle e_1 \dots e_n \rangle}\Big|^2 = (\text{Pitagora})$$

$$= \Big|u - \sum_{i=1}^n u_{e_i}\Big|^2 + \Big|\sum_{i=1}^n u_{e_i} - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\Big|^2 \geq \Big|u - \sum_{i=1}^n u_{e_i}\Big|^2 \quad \boxed{\text{M}}$$

Dunque, se $e_1 \dots e_n$ è un sistema ortogonale, il vettore

$$\sum_{i=1}^{n} u_{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u e_i}{|e_i|^2} e_i$$

è la combinazione lineare di $e_1 \dots e_n$ di minima distanza, e cioè quella che meglio approssima u.

Un'ulteriore semplificazione si può ottenere adoperando un sistema ortonormale, nel qual caso $|e_i|^2 = 1$ e dunque la proiezione di u su $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ sarà

$$u_{\langle e_1, e_2, \ldots e_n \rangle} = \sum_{i=1}^{n} (u e_i)\, e_i$$

Se dunque il sistema è di versori ortogonali, come quelli della base canonica, ad esempio, i coefficienti di ogni versore e_i sono semplicemente i prodotti scalari $u e_i$.
Le stesse idee furono applicate da Eulero e Fourier alle serie trigonometriche che, seppure in dimensione infinita, producono

sostanzialmente lo stesso risultato. La somma $\sum_{i=1}^{n} \frac{u e_i}{|e_i|^2} e_i$

si dice perciò anche sviluppo di Fourier, e i coefficienti $\frac{u e_i}{|e_i|^2}$

anche coefficienti di (Eulero-)Fourier dello sviluppo di u rispetto

al sistema ortogonale $\{e_i\}$.

Anche se semplifica enormemente il calcolo, l'ortogonalità

del sistema $e_1 \dots e_n$ non è strettamente necessaria per poter defi-

nire la proiezione di un vettore su $\langle e_1 \dots e_n \rangle$. Supponiamo in

fatti che $e_1 \dots e_n$ siano vettori arbitrari non nulli e consideremo che la proprietà fondamentale della proiezione, da cui discendono le altre è che $u - u_{\langle e_1 \dots e_n \rangle}$, e cioè il "resto", è ortogonale a tutti i vettori $e_1 \dots e_n$, e di conseguenza a tutte le loro combinazioni lineari.

Per vedere se esiste tale elemento, consideremo un arbitrario elemento di $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ che assumerà dunque la forma $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, e imponiamo che

$$\left(u - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right) e_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

Sviluppando, si ottiene

$$u e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j e_i \qquad (*)$$

dove stavolta (purtroppo) i prodotti scalari $e_j e_i$ non sono quasi tutti nulli: nulla vieta che siano tutti non nulli!

In ogni caso $(*)$ è un sistema lineare con tante equazioni quante sono le scelte di e_i (e cioè tante quante le condizioni di perpendicolarità che esprimono) ed altrettante incognite

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Lo studio della risolubilità richiede un minimo di cautela, ma supposto che esso abbia un'unica soluzione $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$, ne segue che ad essa corrisponde l'elemento di $\langle e_1 \dots e_n \rangle$ di minima distanza da u, in quanto

$$\left| u - \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right|^2 = \Big| \underset{\perp \langle e_1 \dots e_n \rangle}{u - \sum_1^n \bar{\alpha}_j e_j} + \underbrace{\sum_1^n (\alpha_j - \beta_j) e_j}_{\in \langle e_1 \dots e_n \rangle} \Big|^2 \overset{\text{Pitagora}}{=}$$

$$\overset{\text{Pitagora}}{=} \left| u - \sum \bar{\alpha}_i e_i \right|^2 + \left| \qquad \right|^2 \geq$$

$$\geq \left| u - \sum \bar{\alpha}_i e_i \right|^2$$

Da cui

$$\left| u - \sum \beta_i e_i \right| \geq \left| u - \sum \bar{\alpha}_i e_i \right|$$

per ogni scelta di β_i.

Dunque l'elemento $\sum_1^n \bar{\alpha}_i e_i$ sarà la proiezione cercata.

Resta da provare (o da stabilire condizioni che assicurino) che (*) abbia soluzione unica.

TEOREMA: Siano $e_1, \dots, e_n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, e_j e_i = u e_i \quad i = 1, 2, \dots, n$, ha una e una sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ per ogni u prefissato.

DIM.

I coefficienti del sistema sono $e_j e_i$ (riga i, colonna j) e cioè

$$\begin{matrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 & \cdots & e_1 e_n \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 & \cdots & e_2 e_n \\ \vdots & & & \\ e_n e_1 & e_n e_2 & \cdots & e_n e_n \end{matrix}$$

Verrà prima provato che le colonne sono indipendenti se i vettori $e_1 \ldots e_n$ lo sono. Consideriamo una combinazione lineare nulla delle colonne

$$0 = \lambda_1 \begin{pmatrix} e_1 e_1 \\ e_2 e_1 \\ \vdots \\ e_n e_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e_1 e_2 \\ e_2 e_2 \\ \vdots \\ e_n e_2 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} e_1 e_n \\ e_2 e_n \\ \vdots \\ e_n e_n \end{pmatrix} \qquad (**)$$

e proveremo che ciò accade se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Infatti, da (**) e dalla linearità del prodotto scalare, segue

$$0 = \begin{pmatrix} e_1 \sum \lambda_i e_i \\ e_2 \sum \lambda_i e_i \\ \vdots \\ e_n \sum \lambda_i e_i \end{pmatrix} \quad \text{e cioè} \quad e_j \sum_1^n \lambda_i e_i = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

Moltiplicando l'equazione j-esima per λ_j e sommandole tutte membro a membro, e raccogliendo $\sum_1^n \lambda_i e_i$, risulta

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right|^2$$

da cui

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right| = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$$

e dall'indipendenza lineare segue $\lambda_i = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$.
Poiché il sistema $(*)$ è $n \times n$, ed ha le colonne indipendenti, ha una ed una sola soluzione per ogni scelta del secondo membro $(ue_1, ue_2, \ldots, ue_n)$, il che completa lo studio.

$\blacksquare$

La proiezione su uno span $\langle e_1 \ldots e_n \rangle$, $e_1 \ldots e_n$ indipendenti, ancorché meno elegante di quella su uno spazio generato da un sistema ortogonale, può comunque essere definita così:

$$\boxed{u_{\langle e_1 \dots e_n \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i e_i}$$

ove $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$ è l'unica soluzione del sistema

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i e_j = u e_j \qquad j = 1 \dots n}$$

che esisterà (e sarà unica) per ogni u.

La proprietà di minima distanza della proiezione ortogonale appare in numerosi contesti differenti, come ad esempio accade per lo studio della retta di minima distanza fra rette sghembe in $\mathbb{R}^3$, che è caratterizzata proprio dall'essere perpendicolare ad entrambe le rette date.

L'assenza di una struttura euclidea (prodotto scalare, ortogonalità e teorema di Pitagora conseguenti) renderebbe tutto MOLTO più difficile, ma ancora possibile (vedi, ad esempio, H. Brezis: "Analyse Fonctionnel et Equationes aux Derivèe Partielles", anche in italiano o in inglese).