PROIEZIONI

Titolo nota 10/03/2012

LA PROIEZIONE NEGLI SPAZI EUCLIDEI

Placido Longo (10/3/2012)

In queste note viene presentata la teoria elementare delle proiezioni negli spazi euclidei di dimensione finita, nel nostro caso $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Per comodità, ricordiamo che

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1..n \}$$

$$\mathbb{C}^n = \{ (x_1, x_2, \dots x_n) : x_i \in \mathbb{C} \quad \forall i = 1..n \}$$

La somma è definita alla stessa maniera nei due spazi

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

e analogamente si definisce il prodotto per uno scalare (multiplo)

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

ma **ATTENZIONE**: mentre in $\mathbb{R}^n$ lo scalare α è reale, in $\mathbb{C}^n$ lo scalare è complesso (senza che ciò vieti che possa essere anche reale, ovviamente!)

Lo zero e l'opposto sono definiti allo stesso modo

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \qquad -(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

e rispetto a tali definizioni sono soddisfatte tutte le proprietà caratteristiche di spazio vettoriale

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$
$$x+y = y+x$$
$$0+x = x+0$$
$$x+(-x) = 0$$

$$(\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x$$
$$\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$$
$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$
$$1\cdot x = x$$

Nelle identità precedenti le lettere latine rappresentano vettori arbitrari, mentre le lettere greche gli scalari, che saranno dunque reali arbitrari per $\mathbb{R}^n$ e complessi arbitrari per $\mathbb{C}^n$.

Fra le altre cose che notiamo inalterate passando da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ c'è il ruolo della base canonica: per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0 \ldots 0) + x_2(0, 1, 0 \ldots 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1)$$

Le differenze sostanziali riguardano proprio il prodotto scalare.

In $\mathbb{R}^n$, dati $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ si pone

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

La funzione $(x,y) \to xy$ verifica le quattro proprietà assiomatiche

1) $xx \geq 0 \quad \forall x$ 3) $xy = yx$ (simmetria)

2) $xx = 0$ se e solo se $x = 0$ 4) $(\alpha x + \beta y) z = \alpha (xz) + \beta (yz)$ linearità rispetto al primo argomento

dalle quali ne discendono numerose altre, fra cui

$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha (xy) + \beta (xz)$$

$$0 x = 0$$

$$\lambda 0 = 0$$

Nell'estendere la definizione di prodotto scalare a $\mathbb{C}^n$ non si può continuare a porre $xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, perché risulterebbe $xx = \sum_{1}^{n} x_i^2$ e, nei complessi, x_i^2 può benissimo essere negativo. Ad esempio, in $\mathbb{C}^2$

$$(1,i)(1,i) = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 1 + (i)^2 = 0$$

$$(i,i)(i,i) = i \cdot i + i \cdot i = -1 - 1 = -2$$

e dunque le proprietà 1) e 2) non possono essere garantite, mentre non ci sarebbero problemi per 3) e 4). Purtroppo, nonostante l'utilità di 4), le prime due proprietà hanno un irrinunciabile valore geometrico, e dunque si preferisce sacrificare (parzialmente) 3) e 4) pur di mantenere 1) e 2), ponendo $\boxed{xy = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}}$, ove il soprassegno indica, come di consueto, il coniugato. Infatti, risulta

$$xx = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$$

e se $0 = xx = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$ e poiché ognuno dei termini $|x_i|^2$ è un reale positivo, ne segue che tutti i valori $|x_i|^2$ debbono annullarsi, da cui $x_i = 0 \ \forall i = 1..n$ e dunque $x = 0$.

La definizione adottata conserva anche la proprietà 4)

$$(\alpha x+\beta y)z=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x+\beta y)_i\,\overline{z}_i=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i\overline{z}_i+\beta y_i\overline{z}_i)=\alpha xz+\beta yz$$

mentre la 3) deve essere modificata

$$yx=\sum_{i=1}^{n}y_i\overline{x}_i=\sum\overline{\overline{y}_i x_i}=\overline{\sum\overline{y}_i x_i}=\overline{xy}$$

Dunque, permutando l'ordine dei fattori il prodotto scalare cambia, passando al coniugato. Ne seguono anche

$$x(\alpha y) = \bar{\alpha}\, xy \quad \text{e dunque} \quad x(\alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}\, xy + \bar{\beta}\, xz$$

La proprietà $xy = \overline{yx}$ viene detta <u>emisimmetria</u>, e la precedente proprietà, assieme a $(\alpha x + \beta y)z = \alpha xz + \beta yz$, <u>sesquilinearità</u>.

In $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{C}^n$, utilizzando i relativi prodotti scalari, è possibile definire la proiezione di un vettore nella direzione di un'altro, nel seguente modo:

Dato un prodotto scalare, tanto in $\mathbb{R}^n$ quanto in $\mathbb{C}^n$ è possibile definire la lunghezza di un vettore ponendo

$$|u| = (uu)^{1/2}$$

che gode delle seguenti proprietà di immediata verifica:

1) $|u| \geq 0$

2) $|u| = 0 \iff u = 0$

3) $|\lambda u| = |\lambda| \, |u|$

ove $|\lambda|$ rappresenta il modulo, reale o complesso, dello scalare λ.

Altre proprietà sono:

1) $\forall u, v$ tali che $uv = 0$ si ha $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

(teorema di Pitagora)

__Dim__ $|u+v|^2 = (u+v)(u+v) = |u|^2 + uv + vu + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

in quanto $uv = 0$ e $vu = \overline{uv} = \tilde{0} = 0$

2) $|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(u+v) + (u-v)(u-v) =$

$= 2|u|^2 + 2|v|^2 + \cancel{uv} + \cancel{vu} - \cancel{uv} - \cancel{vu} = 2(|u|^2 + |v|^2)$

(Identità del parallelogramma)

DEFINIZIONE Dati due vettori u, v, con $v \neq 0$ si definisce la PROIEZIONE DI u NELLA DIREZIONE DI v, ponendo

$$u_v \equiv \frac{uv}{|v|^2}\, v$$

La proiezione u_v è ben definita in quanto, essendo $v \neq 0$, ne segue dalle proprietà di $\|v\|$ che $\|v\|^2 \neq 0$.

L'applicazione $P(u) = u_v$, fissato $v \neq 0$, verifica le seguenti proprietà fondamentali

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1)\ P(x+y) = P(x) + P(y) & \forall x, y \in X \\ 2)\ P(\lambda x) = \lambda P(x) & \forall x \in X,\ \forall \lambda \text{ scalare} \\ 3)\ P(\lambda v) = \lambda v & \forall \lambda \in X \\ 4)\ P(P(x)) = P(x) & \end{array}}$$

$$\boxed{5)\ \left[x - P(x)\right]v = 0}$$

Dim: sia che $x, y, v \in \mathbb{R}^n$, sia che $x, y, v \in \mathbb{C}^n$, si ha

1) $$P(x+y) = \frac{(x+y)v}{|v|^2}v = \frac{xv}{|v|^2}v + \frac{yv}{|v|^2}v = P(x) + P(y)$$

2) Analogamente
$$P(\lambda x) = \frac{(\lambda x)v}{|v|^2}v = \lambda \frac{xv}{|v|^2}v = \lambda P(x)$$

3) Se $x = \lambda v$ si ha $P(x) = P(\lambda v) = \dfrac{(\lambda v | v)}{|v|^2}v = \lambda v = x$

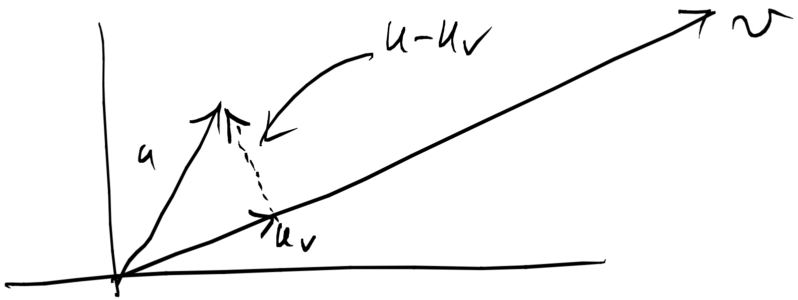
e dunque gli elementi di $\langle v \rangle$ sono invarianti se vengono proiettati in direzione di v.

4) Dalla definizione $P(x) = \left[\frac{xv}{|v|^2}\right] v \in \langle v \rangle$ e, per la proprietà precedente, è invariante e dunque

$$P\big(P(x)\big) = P(x)$$

5) $$(x - x_v)\, v = \left(x - \frac{xv}{|v|^2} v\right) v = xv - \frac{xv}{\cancel{|v|^2}} \cancel{v \cdot v} = 0$$

L'ultima proprietà, anche se semplicissima, è la proprietà fondamentale della proiezione, detta perciò proiezione ortogonale.



Essa assicura che il "resto" della proiezione $u-u_v$ è ortogonale a v e quindi a tutti i suoi multipli, fra cui c'è anche u_v.

I prossimi due risultati sono conseguenze fondamentali di tale risultato

<u>Teorema</u> Per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ (o in $\mathbb{C}^n$), ed ogni $v \neq 0$, si ha

$$|u_v| \leq |u|$$

<u>Dim.</u> Basta osservare che

$$|u|^2 = |\underbrace{u_v}_{\text{parallelo a } v} + \underbrace{(u-u_v)}_{\text{ortogonale a } v}|^2 \overset{\text{Pitagora}}{=} |u_v|^2 + |u-u_v|^2 \geq |u_v|^2$$

<u>Corollario</u> Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) si ha

$$|uv| \leq |u|\,|v| \quad \text{(disuguaglianza di Schwartz)}$$

<u>Dim</u>. Infatti, se $v \neq 0$, $|u_v| \leq |u|$ e poiché $|u_v| = \frac{|uv|}{|v|^2}|v| = \frac{|uv|}{|v|}$ si segue che $|uv| \leq |u||v|$

Se poi fosse $v=0$ allora $uv=0$ e $|v|=0$, da cui la tesi.

<u>Teorema</u> (della minima distanza). Sia $v \neq 0$.

Allora, per ogni $u \in X$, si ha

$$|u - u_v| \le |u - w| \quad \forall w \in \langle v \rangle$$

e cioè la proiezione u_v è l'elemento di $\langle v \rangle$ di minima distanza da u.

Dim. Si ha

$$|u-w|^2 = \Big|\underbrace{u - u_v}_{\text{ortogonale a } v} + \underbrace{u_v - w}_{\text{parallelo a } v}\Big|^2 = |u-u_v|^2 + |u_v - w|^2 \ge |u-u_v|^2$$