PRODOTTO VETTORE

Titolo nota 21/03/2012

ALCUNE PROPRIETA' DEL PRODOTTO VETTORE

Il prodotto <u>vettore</u>, od <u>esterno</u>, è definito in $\mathbb{R}^3$ ponendo

$$a \wedge b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Il prodotto così definito gode delle seguenti proprietà

1. $a \wedge b = -b \wedge a$ (antisimmetria)
2. $$\left.\begin{aligned} (\alpha a + \beta b) \wedge c &= \alpha (a \wedge c) + \beta (b \wedge c) \\ a \wedge (\beta b + \gamma c) &= \beta (a \wedge b) + \gamma (a \wedge c) \end{aligned}\right\} \text{(bilinearità)}$$
3. $a \wedge a = -(a \wedge a) = 0$ (nilpotenza)
4. $a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0$ (Identità di Jacobi)
5. $a (a \wedge b) = b (a \wedge b) = 0$ (ortogonalità con i fattori)

(6) $|a \wedge b|$ è l'area del parallelogramma avente a e b come lati.

NOTE: 1) Le ultime due proprietà determinano il modulo del vettore $a \wedge b$, pari all'area del parallelogramma costruito sui lati a e b, che vale $|a||b| \sin\varphi$ (ove φ è l'angolo formato dai due vettori) e la sua direzione che, dall'annullarsi dei due prodotti scalari

$$a\,(a \wedge b) \quad e \quad b\,(a \wedge b)$$

risulta ortogonale ad a e b, ed al loro piano.

In Fisica si usa definire così il prodotto vettore, aggiungendovi una regola per ottenerne il verso:

Regola della mano destra: orientando a come il pollice e b come l'indice, il medio dà il verso di $a \wedge b$

Regola della vite: se una vite (destrorsa!) è posta in modo che avvitandola a si sovrapponga a b descrivendo l'angolo più piccolo dei due possibili, allora la vite avanza nella direzione di $a \wedge b$.

Regola del "Simposio": un uomo in piedi al centro del tavolo che vede l'estremo di a passare la coppa alla sua destra all'estremo di b (descrivendo

l'angolo più piccolo) è orientato come $a \wedge b$.
In tal caso i convitati, come nel simposio di Platone, bevono a turno da una coppa, passandola al convitato alla propria destra.
L'uomo al centro della tavola la vede girare in senso antiorario, se è orientato come $a \wedge b$.

Si noti anche che, se a e b sono allineati, il parallelogramma precedente degenera in un segmento e dunque $a \wedge b = 0$, l'unico vettore con modulo nullo.
Infatti, se $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) = \lambda a$ risulta

$$a \wedge b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & \lambda a_2 \\ a_3 & \lambda a_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 \\ a_3 & \lambda a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 \\ a_2 & \lambda a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_2 a_3 - \lambda a_2 a_3 \\ -\lambda a_1 a_3 + \lambda a_1 a_3 \\ \lambda a_1 a_2 - \lambda a_1 a_2 \end{pmatrix} = 0$$

2) La (3) deriva immediatamente dalla (1). Se $b = a$, segue dalla (1) che $a \wedge a = - a \wedge a$ e dunque

$$a \wedge a = 0$$

3) La (1), la (2) e la (4) sono le proprietà caratteristiche delle algebre di LIE (matematico svedese) e possono essere (pazientemente) verificate sviluppando i due membri.

Concludiamo con due identità attribuite a Lagrange

(7) $$|a\wedge b|^2 + (ab)^2 = |a|^2|b|^2$$

(8) $$a\wedge(b\wedge c) = b\,(ac) - c\,(ab)$$

La prima non è altro che l'identità fondamentale della trigonometria $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$: basta ricordare come è definito il coseno dell'angolo fra due vettori ed il legame fra l'area del parallelogramma ed il seno dello stesso angolo.
L'altra può essere verificata sviluppando i due membri.