MOLTEPLICITA' E AUTOSPAZI

Titolo nota 14/04/2012

DIMENSIONI DI AUTOSPAZI E MOLTEPLICITA' DI AUTOVALORI

Lo scopo di queste note è di dimostrare il seguente risultato

TEOREMA: Sia $A: X \to X$ lineare, sia λ_0 un autovalore e sia $u_1 \dots u_k$ una base dell'autospazio relativo a λ_0, ossia dell'insieme delle soluzioni di

$$A(u) = \lambda_0 u$$

Allora, la molteplicità di λ_0 come radice del polinomio caratteristico di A è MAGGIORE O UGUALE a k, che è la dimensione dello autospazio.

DIM.

Sia $u_1 \dots u_k v_{k+1} \dots v_n$ un completamento di $u_1 \dots u_k$ ad una base di X.

Il polinomio caratteristico è invariante per la scelta della base, e dunque può essere calcolato rispetto alla base $u_1 \dots u_k\, v_{k+1} \dots v_n$ prima costruita (vedi dispense sulla diagonalizzazione).
Per prima cosa deve essere determinata la matrice associata ad A rispetto alle basi "di partenza" e "d'arrivo", che sono coincidenti, $u_1 \dots u_k, v_{k+1} \dots v_n$. Per fare ciò occorre calcolare le immagini dei vettori della base di partenza, calcolarne le coordinate rispetto alla coincidente base d'arrivo e porle in colonna. Nel caso presente

$$A(u_i) = \lambda_0 u_i \qquad i = 1..k$$

e, per l'unicità delle coordinate, il vettore immagine $A(u_i) = \lambda_0 u_i$ avrà coordinata i-esima eguale a λ_0 e tutte le altre nulle, e dunque la matrice associata avrà le prime k colonne della forma $(\lambda_0 e_1, \lambda_0 e_2, \dots, \lambda_0 e_k)$ mentre nessuna informazione si ha sulle ultime $n-k$ colonne.
In definitiva, la matrice associata avrà la struttura a blocchi seguente

$$
A = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & k \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ \\ \\ n \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc|c}
\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & \lambda_0 & & 0 & B \\
0 & 0 & & 0 & \\
\vdots & \vdots & \cdots & \lambda_0 & \\
\hline
0 & 0 & & 0 & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & C \\
0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Il polinomio caratteristico corrispondente, $\det(A - \lambda I)$, vale

$$\det\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\lambda_0-\lambda & & 0 & & & \\
0 & \lambda_0-\lambda & & & B & \\
0 & & \ddots\ \lambda_0-\lambda & & & \\
\hline
 & & & C_{k+1\,k+1}-\lambda & & \\
 & 0 & & & \ddots & \\
 & & & & & C_{nn}-\lambda
\end{array}\right).$$

La definizione di determinante richiede di sommare tutti i possibili prodotti formati con un elemento per ogni colonna su righe diverse (cambiati di segno se la permutazione degli indici è dispari) e dunque nel nostro caso gli unici prodotti che possono essere non nulli sono quelli che contengono, per le prime k colonne gli elementi della diagonale, il che esclude dal calcolo tutti gli elementi non diagonali delle prime k righe, e cioè quelli della matrice B; mettendo in evidenza $(\lambda_0-\lambda)^k$ in tutti i prodotti del determinante si ottiene

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda_0-\lambda)^k\,\tilde{p}(\lambda)$$

ove $\tilde{p}(\lambda) = \det(C-\lambda I)$ proviene dal blocco $C-\lambda I$ delle ultime $n-k$ righe ed $n-k$ colonne. Ne segue che λ_0 è una radice dell'equazione

$$0 = \det(A-\lambda I) = (\lambda-\lambda_0)^k \det(C-\lambda I)$$

e dunque è di molteplicità almeno k. $\blacksquare$

È possibile che la dimensione dello autospazio sia strettamente minore della molteplicità dell'autovalore relativo all'autospazio, come mostra l'esempio seguente, perché $\det(C-\lambda I)$ può annullarsi per $\lambda=\lambda_0$.

ESEMPIO:

Sia $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

La matrice che rappresenta A rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la sua equazione caratteristica è

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

che ha un'unica radice doppia $\lambda = 0$

Per determinare la dimensione dell'autospazio occorre determinare tutte le soluzioni di $(A-\lambda I)u=0$ per $\lambda=0$. Ponendo $\lambda=0$ in

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene $\boxed{u_2 = 0}$, tutte le soluzioni delle quali sono del tipo $(u_1, u_2) = (\alpha, 0) = \alpha(1,0)$

L'insieme delle soluzioni, e cioè l'autospazio di $\lambda=0$, è di dimensione 1, che è quindi strettamente minore della molteplicità algebrica della radice $\lambda=0$ dell'equazione caratteristica, uguale a 2. $\blacksquare$

A tale proposito si può osservare che, per il teorema di Gauss, il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ si può fattorizzare come

$$p(\lambda) = a(\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{\mu_m}$$

dove $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m = n = \dim X$.

Poiché la somma di autospazi è diretta, se ogni autospazio relativo all'autovalore λ_i ha dimensione pari a μ_i segue dal teorema sulla dimensione delle somme dirette che tale somma, sottospazio di X, ha dimensione $\sum_1^m \mu_i = n$ e dunque coincide con X, che avrà allora come base spettrale l'unione delle basi degli autospazi. Ne segue la parte sufficiente del

TEOREMA : <u>Condizione necessaria e sufficiente</u> <u>perché</u> $A : X \to X$ <u>possieda una base spettrale</u> è che, <u>per ogni autovalore</u>, <u>la sua molteplicità algebrica coincide con la dimensione del relativo autospazio</u>, che verrà detta <u>MOLTEPLICITA' GEOMETRICA</u>.

La prova della condizione necessaria richiede il seguente

LEMMA: Siano $v_1 \dots v_n$ autovettori indipendenti relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Sia inoltre v un autovettore relativo ad un autovalore λ.

Allora, se esistono α_i, $i=1..n$, tali che $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ risulta $\lambda_i = \lambda$ per ogni $i=1..n$ per cui $\alpha_i \neq 0$.

Dim. Si ha

$$A(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i$$

e

$$\lambda v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda v_i$$

da cui, essendo $A(v) = \lambda v$, segue

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda) v_i = 0$$

Dall'indipendenza di $v_1 \dots v_n$ segue $\alpha_i(\lambda_i - \lambda) = 0 \ \forall i=1..n$, e per ogni i per il quale $\alpha_i \neq 0$ si avrà $\lambda_i - \lambda = 0$

$\boxed{//}$

Dim. (condizione necessaria). Se A è diagonalizzabile ammette base ortonormale; siano $u_1^i \dots u_{n_i}^i$ gli autovettori relativi all'autovalore λ_i, $i=1,..,k$ e sia X_{λ_i} il relativo autospazio. Il numero complessivo degli autovettori u^i_j è n, essendo una base di X. Inoltre tale numero vale $\sum_{i=1}^{k} n_i$.

Proveremo adesso che $\dim X_{\lambda_i} = n_i$, dimostrando che $u^i_1, \dots, u^i_{n_i}$ è una base per X_{λ_i}, e poiché sono indipendenti in quanto elementi di una base di X, a tale scopo basterà provare che

$$X_{\lambda_i} = \langle u^i_1, \dots, u^i_{n_i} \rangle$$

Sia dunque $u \in X_{\lambda_i}$, sicché $A(u) = \lambda_i u$, e sia $u \neq 0$. Poiché u^i_j è una base di X, esisteranno α^i_j tali che

$$u = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha^i_j u^i_j$$

Poiché u^i_j sono autovettori indipendenti, per il lemma precedente gli unici coefficienti α^i_j che possono essere non nulli sono quelli dei vettori $u^i_1, u^i_2, \dots, u^i_{n_i}$, che sono relativi allo stesso autovalore λ_i. Dunque, in realtà,

$$u = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha^i_j u^i_j \in \langle u^i_1, u^i_2, \dots, u^i_{n_i} \rangle$$

Dunque

$$\sum_{i=1}^{k} \dim X_{\lambda_i} = n$$

e poiché, dal teorema di Gauss, si ha anche

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = n$$

sottraendo membro a membro da questa la precedente equazione, ne segue

$$\sum_{i=1}^{k} (\mu_i - \dim X_{\lambda_i}) = 0 \qquad (*)$$

Dal fatto che, per il teorema precedente,

$$\mu_i - \dim X_{\lambda_i} \geq 0 \quad \forall i = 1..k$$

da $(*)$ segue infine

$$\mu_i - \dim X_{\lambda_i} = 0 \quad \forall i = 1..k$$

che è la tesi.

$\boxed{///}$

L'ultimo risultato motiva la seguente scelta di nomi

- MOLTEPLICITA' ALGEBRICA DI UN AUTOVALORE, per la molteplicità dell'autovalore come radice del polinomio caratteristico.

- MOLTEPLICITA' GEOMETRICA DI UN AUTOVALORE, per la dimensione del corrispondente autospazio.

Il criterio di diagonalizzabilità precedente può essere così espresso: "Condizione necessaria e sufficiente perché A sia diagonalizzabile è che, per ogni suo autovalore, la molteplicità geometrica coincida con quella algebrica".

Infine, per diagonalizzare un operatore reale su $\mathbb{R}^n$, non c'è purtroppo il teorema di Gauss a garantire che la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali faccia n: ciò dovrà dunque essere oggetto di un'ipotesi separata, come ad esempio quella di assumere che il polinomio caratteristico abbia tutte le radici reali. Ciò è garantito nel caso molto importante delle matrici simmetriche dal fatto che l'operatore associato alla matrice è autoaggiunto, mentre è falso, a parte i due casi "banali" dell'identità e dell'"inversione rispetto allo origine", per il caso altrettanto importante delle matrici unitarie od ortogonali, per le quali la distanza delle immagini coincide con quella dei vettori di partenza, che costituiscono il modello astratto per trasformazioni geometriche come le simmetrie o le rotazioni.