LA MISURA DI LEBESGUE:

UN'INTRODUZIONE BREVE.

In questa nota viene presentata la teoria della misura sviluppata da H. Lebesgue agli inizi del secolo scorso, senza dimostrazioni.

Il concetto di misura unifica i concetti di lunghezza di un intervallo, di area di una figura piana, di volume di un solido.

Le idee che seguiremo nella costruzione hanno origine lontane: le inondazioni del Nilo portavano sì del nuovo fertile limo sulle pianure d'Egitto, ma cancellavano completamente i confini delle proprietà: in assenza di moderni teodoliti o GPS, erano difficilissimi da tracciare di nuovo. Era però possibile e persino facile ottenere un appezzamento di terra da seminare grande tanto quanto quello precedente, anche se da un'altra parte — davvero un forte stimolo a sviluppare un modo per misurare la terra: in una parola una Geo (terra) metria (misura).
Nella Geometria euclidea classica ci sono teoremi sulla equivalenza (ossia uguaglianza di aree): i celebri teoremi di Pitagora e di Euclide, ma anche le regole per l'area delle figure piane imparati a scuola; ci sono anche le prime

applicazioni del calcolo per approssimazione, con errore ineliminabile (critica di Aristotele alla "quadratura del cerchio" di Antifonte e Brisone, che ha anche introdotto l'idea di approssimare le aree per difetto e per eccesso, che stiamo per adoperare), ma arbitrariamente piccolo (metodo di esaustione di Eudosso e quadratura della parabola di Archimede, oltre alla stima del valore di π, tramite i poligoni regolari, e il calcolo del volume della sfera, il suo capolavoro.

La costruzione di Lebesgue inizia con gli intervalli.

INTERVALLI IN $\mathbb{R}^n$ E LORO MISURA

Un intervallo in $\mathbb{R}^n$ è definito come il prodotto cartesiano di intervalli in $\mathbb{R}$

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] =$$

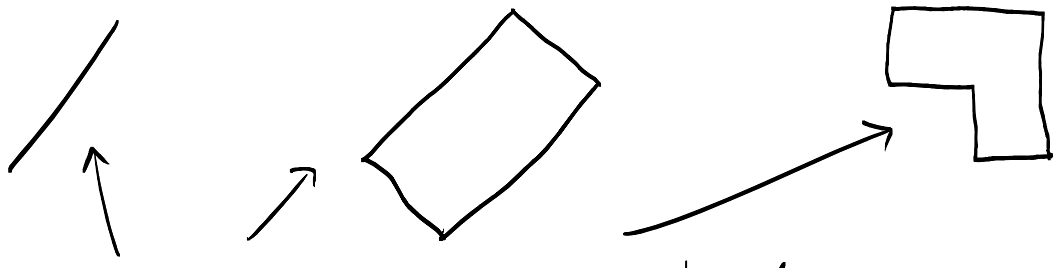
$$= \left\{ (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i] \right\}$$

Per gli intervalli si pone

$$\boxed{|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)}$$

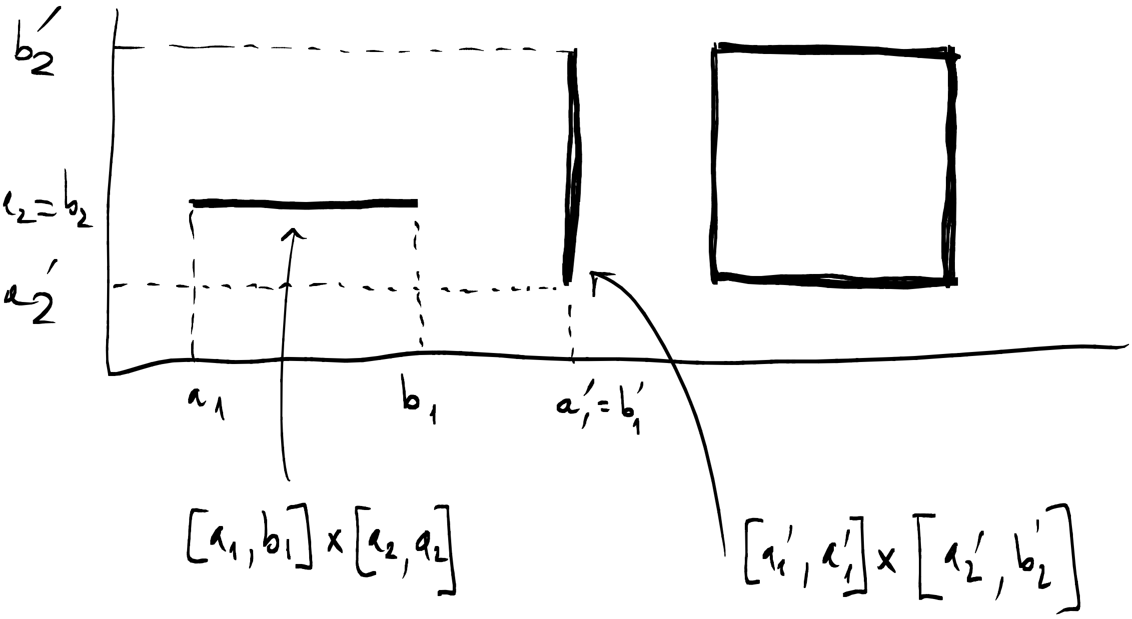
Esempi di intervalli sono... gli intervalli in $\mathbb{R}$, i rettangoli coi lati paralleli agli assi o i parallelepipedi cogli spigoli paralleli agli assi.

Non sono intervalli i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^2$



non sono prodotti cartesiani di intervalli

mentre lo sono



Gli intervalli "degeneri" $[a_2,a_2]$ e $[a_1',a_1']$ sono ammessi, e danno luogo ad insiemi di misura nulla, essendo essa il prodotto delle ampiezze degli intervalli, ed una è nulla.

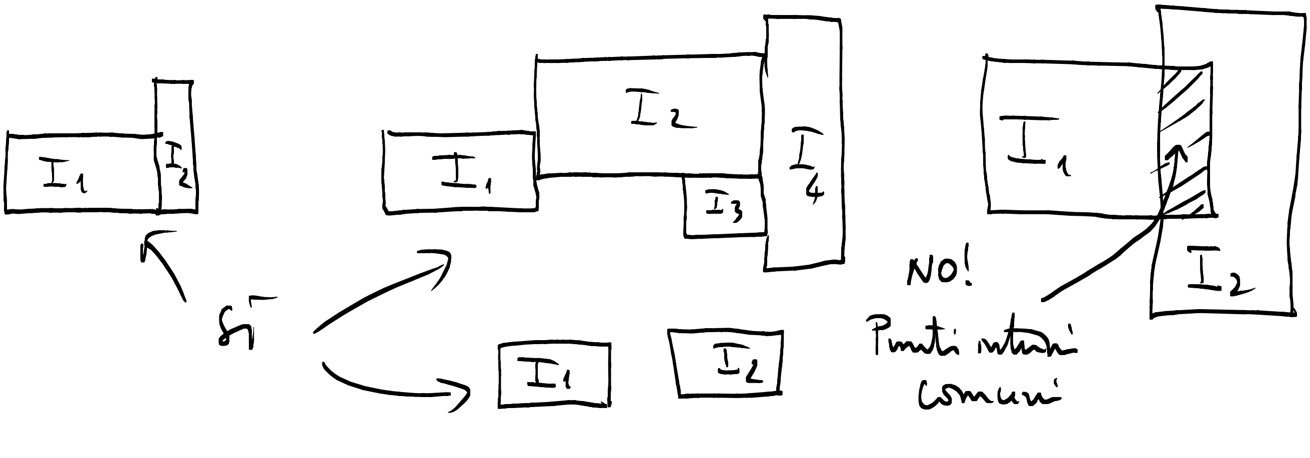
Si userà anche il simbolo $m(I)$ per la misura di I.

MISURA DEI PLURINTERVALLI

Il passo successivo, alla base delle regole dell'area per le regioni poligonali, è quello di estendere la definizione ad una famiglia speciale di esse: i plurintervalli (o plurirettangoli).

DEFINIZIONE: Un plurintervallo P è un insieme tale che esistano un numero finito di intervalli I_i, $i=1..n$, PRIVI DI PUNTI INTERNI COMUNI, verificanti $P=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$.

Dunque un plurintervallo è unione finita di intervalli, che possono "toccarsi" (punti di frontiera comuni) ma non "sovrapporsi" (punti interni comuni). Ad esempio

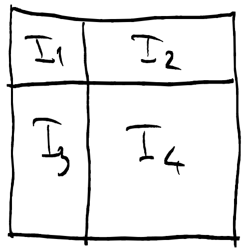


Attenzione: nulla vieta di ottenere la stessa regione in più modi. Se però si evitano le sovrapposizioni si può dimostrare che l'area della regione è la somma delle aree degli intervalli che la compongono in qualunque modo essa sia stata decomposta.

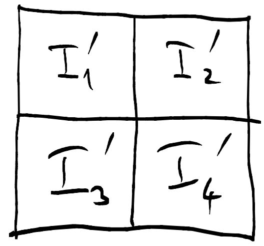
DEFINIZIONE: Dato un plurintervallo P, unione degli intervalli $I_1, I_2, \dots, I_n$, si pone

$$|P| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$$

Come è stato già detto prima, questa definizione non ha senso fin a che non si dimostri che il numero $|P|$ così definito sia sempre lo stesso qualunque sia il modo scelto di decomporre P come unione di I_i, $i=1..n$. Ad esempio, non è affatto evidente, a priori, che



dia lo stesso risultato di



Non faremo la dimostrazione di ciò: chi voglia approfondire può utilizzare un qualunque libro di teoria della misura.

La proprietà fondamentali della misura ora introdotta sono oggetto dei prossimi teoremi.

TEOREMA (finita additività della misura):

Se P, P' sono due pluriintervalli disgiunti, allora

$$|P \cup P'| = |P| + |P'|$$

NOTA: la proprietà precedente continua a valere se $P \cap P' \neq \emptyset$, purché $P \cap P' \subseteq \partial P \cup \partial P'$

Ciò accade se P e P' non hanno punti interni comuni, pur potendo condividere parti di frontiera.

TEOREMA (monotonia della misura):

Se P, P' sono pluriintervalli e $P \supseteq P'$, allora

$$|P| \geq |P'|$$

Sono tutte proprietà intuitive dell'area o del volume e forniscono il modello per quelle analoghe più generali per la misura di Lebesgue.

La teoria così sviluppata è (ancora) inferiore a quella greca: un triangolo  non è un pluriintervallo e non ha ancora un'area.

I passi successivi consistono nel definire la misura per gli insiemi aperti, e per quelli chiusi e limitati (compatti).

MISURA DEGLI INSIEMI APERTI

Un insieme aperto è un insieme costituito solo da punti interni, e cioè contenente un intorno di ogni suo punto.

Gli aperti non vuoti, contenendo sfere, contengono intervalli in essi contenuti. Si può dunque porre la

DEFINIZIONE: Per ogni insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si pone

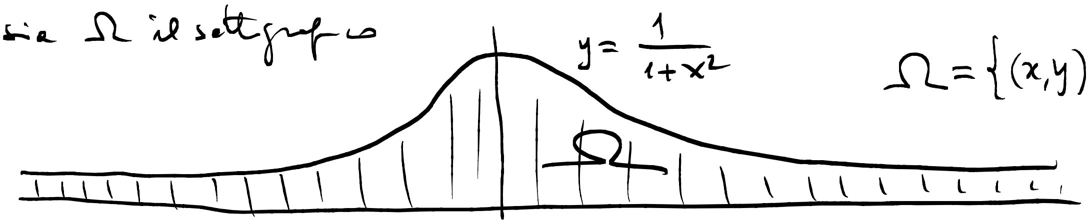
$$|\Omega| = \sup_{\substack{P \subseteq \Omega \\ P \text{ plurintervallo}}} |P|$$

Si pone anche

$$|\emptyset| = 0$$

Attenzione! Ci sono aperti di misura infinita: $\mathbb{R}^n$, il quadrante $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\}$ o la striscia $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \;\; y \in \mathbb{R}\}$ sono di misura infinita perché fra i plurintervalli in essi contenuti c'è l'intervallo $[-k,k]^n$ per il quale la misura vale $(2k)^n$ il cui sup è $+\infty$, o l'intervallo $[1,k]^n$, di misura $(k-1)^n$ non limitata in k anch'essa, o l'intervallo $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\times[-k,k]$, di misura $\frac{1}{3}\times 2k$, anch'essa non limitata al divergere di k.

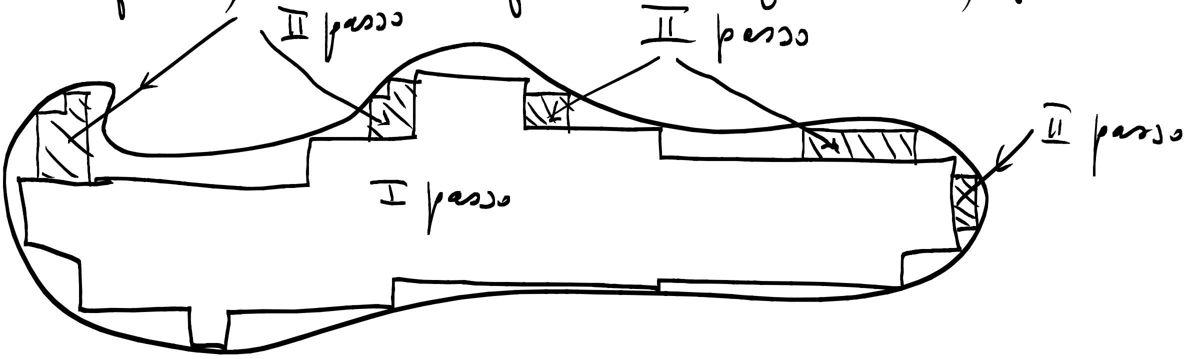
Esistono pure insiemi non limitati, ma di misura finita. Si consideri la funzione (la "versiera" di Maria Gaetana Agnesi) e sia Ω il sottografico



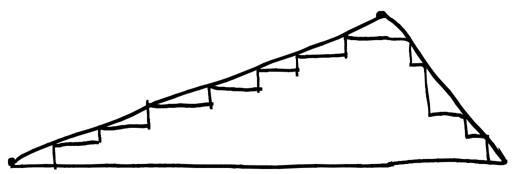
$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<\frac{1}{1+x^2}\right\}$$

Per ogni intervallo I_i contenuto in Ω si consideri la striscia I_i' di uguale base e di altezza che parte da 0 e giunge fino a "toccare" il grafico di $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Poiché $I_i'\supseteq I_i$ ne segue che $|P|\le\sum_1^n|I_i'|$ e poiché tale valore coincide con la somma inferiore dell'integrale di $\frac{1}{1+x^2}$ esteso all'unione delle proiezioni di $I_1, I_2, \dots I_n$ sull'asse x, esso è minore o uguale all'integrale su tale insieme. Infine, poiché $f\ge 0$, l'integrale su qualunque insieme è minore o uguale a $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$ e dunque qualunque plurintervallo contenuto in Ω avrà misura non superiore a π. Ne segue che $\sup|P|\le\pi$.

Dunque tutti gli aperti sono misurabili, anche se la loro misura non può essere calcolata "algoritmicamente", con un numero finito di operazioni, ma richiede un'"estrapolazione", un "limite", costituito dal sup. L'estremo superiore è un concetto recentissimo nell'Analisi Matematica, ma l'idea seguita è quella di Eudosso: il "metodo di esaustione" consisteva nell'inscrivere un poligono (nel nostro caso un plurintervallo) nella figura della quale si vuole determinare l'area, e poi inscriverne un altro nelle lunette rimaste fuori, e via così fino alla fine ..., fino ad



"esaurire" l'area. Con questa "modifica" alla definizione tutte le "figure piane" della geometria greca risultano misurabili



è chiarissimo il legame con l'integrale, già osservato nello esempio sul sottografico di $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Sono misurabili anche oggetti molto più complessi, del tutto ignoti o non in grado di interessare i Greci. Ad esempio sia q_n una successione che assume tutti i valori razionali di $[0,1]$, che si può definire così

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5} \dots$$

ottenuta esaurendo tutti i numeratori possibili senza ripetere frazioni già considerate (es. $\frac{1}{1}, \cancel{\frac{2}{2}}$ oppure $\frac{1}{2}, \cancel{\frac{2}{4}}, \cancel{\frac{3}{6}} \dots$) prima di aumentare il denominatore; consideriamo ora l'insieme

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2^{n+2}}}(q_n)$$

ove $B_\delta(x_0)$ è la sfera aperta di centro x_0 e raggio δ, e cioè l'intervallo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. È aperto perché è unione di aperti. Potrebbe sembrare che coincida con $[0,1]$, perché ogni $x \in [0,1]$ si può approssimare con razionali, ma non è così, come proveremo più avanti: in sostanza, è vero che arbitrariamente vicino ad ogni reale ci sono razionali, ma i raggi delle sfere decrescono esponenzialmente con il crescere del denominatore (e quindi della "finezza" dell'approssimazione) e non è quindi affatto evidente che ogni punto di $[0,1]$ sta in Ω, ed infatti è falso!

Un simile insieme è misurabile, in quanto aperto, anche se non si può neppure disegnare.

LA MISURA DEGLI INSIEMI COMPATTI

La prossima categoria di insiemi misurabili sono gli insiemi chiusi e limitati, ossia i compatti.

Poiché i compatti sono limitati esiste una sfera, e quindi anche un intervallo che li contenga. Si pone allora

DEFINIZIONE: Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto.

Si definisce

$$|K| = \inf_{\substack{P \supseteq K \\ P \text{ plurintervallo}}} |P|$$

NOTA: Poiché ogni compatto è contenuto in un intervallo ne segue subito $|K| < +\infty$; diversamente da quanto accade per gli aperti, tutti i compatti sono di misura finita.

L'idea di Baddone, di approssimare dall'interno e dallo esterno con poligoni, verrà utilizzata per il prossimo passo.

GLI INSIEMI MISURABILI SECONDO LEBESGUE

In questa sezione verrà definita la misura nelle condizioni di massima generalità (limitatezza a parte).

DEFINIZIONE: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, limitato.

Si pone allora

$$m_*(E) = \sup_{\substack{K \subseteq E \\ K \text{ compatto}}} |K|$$

$$m^*(E) = \inf_{\substack{\Omega \supseteq E \\ \Omega \text{ aperto}}} |\Omega|$$

I valori $m_*(E)$ ed $m^*(E)$ sono detti rispettivamente MISURA INTERNA ed ESTERNA di E.

Se poi

$$m_*(E) = m^*(E)$$

E si dirà MISURABILE SECONDO LEBESGUE

ed il valore comune di $m_*(E)$ ed $m^*(E)$ verrà detto MISURA DI LEBESGUE di E, e denotato con $|E|$ o con $m(E)$.

Le misure interna ed esterna sono ben definite, perché ci sono sempre aperti contenenti qualunque E, come ad esempio $\mathbb{R}^n$ stesso, e ci sono sempre compatti contenuti in ogni E, come ad esempio i suoi singoli punti.

NOTA: esistono insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Per un esempio, consultare un libro di teoria della misura (come Royden: "Real Analysis" Collier MacMillan o W. Rudin: "Analisi Reale e Complessa" Boringhieri).

La misura di Lebesgue gode delle seguenti proprietà:

TEOREMA:

1) E, F misurabili con $E \subseteq F \Rightarrow |E| \leq |F|$

2) E, F misurabili, $E \cap F = \phi$, allora $E \cup F$ è misurabile e $|E \cup F| = |E| + |F|$

3) E, F misurabili allora $E \cup F$ è misurabile e $|E \cup F| \leq |E| + |F|$

4) E, F misurabili $\Rightarrow E \cap F$, $E - F$ sono misurabili.

5) E, F misurabili e $F \subseteq E \Rightarrow |E \setminus F| = |E| - |F|$

6) Siano E_i, $i \in \mathbb{N}$, misurabili. Allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ è misurabile e $\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|$

7) Siano E_i, $i \in \mathbb{N}$, misurabili, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Allora $\bigcup_{1}^{\infty} E_i$ è misurabile e

$$\left|\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|$$

8) Siano $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \cdots$ misurabili. Allora $\bigcup_{1}^{\infty} E_i$ è misurabile e

$$\left|\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right| = \sup_{\mathbb{N}} |E_i|$$

9) Siano $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$ misurabili, e sia $|E_1|$ finita.

Allora, $\bigcap_1^\infty E_i$ è misurabile e inoltre

$$|\bigcap_1^\infty E_i| = \inf_N |E_i|$$

9) Per ogni misurabile E, $|E| \geq 0$.

Potrebbe sembrare che tutte le proprietà discendano dalla 7) e dalla 9) (e questo è il punto di vista di Rudin), ma in realtà la costruzione è complessa e la 7), la più importante delle proprietà della misura di Lebesgue che la differenzia da tutte quelle introdotte in precedenza, si prova per ultima utilizzando le altre.

La 1) è la <u>MONOTONIA</u>. La 2) è l'<u>ADDITIVITA' FINITA</u>. La 3) è la <u>SUBADDITIVITA' FINITA</u>. La 6) è la SUBADDITIVITA' NUMERABILE. La 7) è l'ADDITIVITA' NUMERABILE. La 8) e la 9) sono <u>LE CONTINUITA' VERSO L'ALTO E VERSO IL BASSO</u>.

La 3), la 4), la 7) e $|\emptyset| = 0$ sono le proprietà che individuano la σ-algebra degli insiemi misurabili: se E_i sono insiemi misurabili lo sono anche l'unione $\bigcup_{1}^{\infty} E_i$, l'intersezione, la differenza, il complementare.

Occorre fare <u>molta attenzione alle ipotesi della 8) e della 9)</u>: la differenza consiste nell'ipotesi che $|E_1| < \infty$ presente solo nella 9), che è essenziale. Infatti sia

$$E_i = \{x \in \mathbb{R} \,,\ x \geq i\}$$

Allora $\bigcap E_i = \emptyset$, $|E_i| = +\infty$, ma $0 = |\emptyset| \neq \inf_{\mathbb{N}} |E_i| = +\infty$.

MISURABILITA' DI INSIEMI NON LIMITATI

DEFINIZIONE Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario. Allora E si dirà misurabile se lo sono tutti gli insiemi $E_k = E \cap [-k,k]^n$, e si porrà $|E| = \sup_{\mathbb{N}} |E_k|$

La misura, così estesa agli insiemi non limitati, continua a godere di tutte le proprietà elencate nell'ultimo teorema.

Altrettanto accade per le proprietà degli insiemi misurabili.

NOTE CONCLUSIVE.

La numerabile additività è una proprietà cruciale della misura. Ad esempio $\mathbb{Q}\cap[0,1]$, che non è né aperto né chiuso, è comunque misurabile e di misura nulla, perché basta porre

$$\mathbb{Q}\cap[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\},$$ ove q_n è la successione biiettiva su $\mathbb{Q}$ prima introdotta, per osservare che dal fatto che ogni punto ha misura 0 (è chiuso e limitato e può essere racchiuso dentro un intervallo di lunghezza comunque piccola e dunque l'inf delle misure è 0), ne segue che

$$\left|\mathbb{Q}\cap[0,1]\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |q_i| = 0$$

Con la numerabile subadditività si prova facilmente che $\bigcup_{1}^{\infty}\left[q_n - \frac{1}{2^{n+2}}, q_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right]$ è strettamente contenuto in $[0,1]$, poiché la sua misura è minore o uguale a $\sum_{1}^{\infty}\left(q_n + \frac{1}{2^{n+2}} - q_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right) =$

$$= \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Dunque $\bigcup_{1}^{\infty}\left[q_n - \frac{1}{2^{n+2}}, q_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right]$ non può coincidere o contenere $[0,1]$ perché ha misura minore di $\frac{1}{2}$, mentre $[0,1]$ ha misura 1.

Un problema piuttosto fastidioso della teoria della misura e che un insieme piuttosto "semplice", come ad esempio un intervallo chiuso $[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ ha diritto a <u>QUATTRO</u>, a priori diverse, definizioni di misura: quella in qualità di intervallo, quella come plurintervallo (costituito da un unico intervallo), quella come compatto (è chiuso e limitato), e quella come misurabile. E' a carico di chi sviluppa la teoria <u>provare</u> che sono coincidenti, come è ovvio che debba essere.

Una costruzione organica, da maestro, della teoria della misura è reperibile sul libro di Kolmogorov (il maestro) e Fomin "Teoria delle funzioni e Analisi Funzionale" Editori Riuniti. Una più semplice si può trovare su E. Giusti Analisi Matem. II, molto vicina alla teoria "all'italiana".

La nascita della moderna teoria dell'integrazione è legata, per qualche verso, alla teoria per la convergenza delle serie di Fourier: mentre le serie di potenze convergono per definizione ad una funzione analitica (cioè C^∞, con in più un controllo sul massimo modulo delle derivate), per la serie di Fourier, è "normale" la convergenza a funzioni persino discontinue: ciò fu chiaro sin dalle prime lettere scambiate fra Eulero (il maestro dei maestri) e Fourier sull'argomento.

La teoria della misura sin qui presentata consente di estendere la teoria dell'integrazione a funzioni estremamente discontinue.

Ad esempio, la funzione di Dirichlet è definita da

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{su } \mathbb{Q}\\ 0 & \text{su } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

L'insieme $\mathbb{Q}$ è di misura nulla, perché è numerabile.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots\\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots\\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Il quadro contiene tutte le frazioni positive, comprese quelle apparenti come $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \cdots$, e moltissime equivalenti come $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \cdots$

Per numerare i razionali positivi, seguendo Cantor, attraversiamo il quadro seguendo le frecce, e cioè seguendo le diagonali (tutte finite), scartando le frazioni equivalenti ad altre già considerate; otteniamo la successione $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \cdots$. Numerati poi i razionali positivi, si possono numerarli tutti usando la sequenza $0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3 \cdots$

Dunque i razionali sono unione numerabile di punti (di misura 0) e dunque essi stessi hanno misura 0: per l'integrazione sono "trascurabili" come i singoli punti per l'integrale di Riemann.

Per la teoria dell'integrazione di Lebesgue, che utilizza il concetto di misura fin qui introdotto, la funzione di Dirichlet non è molto diversa da una funzione sempre nulla salvo un numero finito di punti per l'integrale di Riemann. E' bene ricordare che la funzione di Dirichlet è il classico esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

L'integrale di Lebesgue, infine, consente di introdurre, con qualche fatica, lo spazio L^2, che consente lo sviluppo di una teoria organica delle serie di Fourier, perché contiene i limiti, rispetto alla norma associata al prodotto scalare

$$fg = \int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx$$

e cioè

$$|f|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} f^2(x)\,dx \right)^{1/2}$$

di tutte le serie trigonometriche.

Per i dettagli, non banali, occorre approfondire su un buon libro di Analisi Funzionale, come quelli già citati: Royden, Rudin o Kolmogorov, o molti altri...