BREVE INTRODUZIONE AL PRINCIPIO D'INDUZIONE

(23/I/2021)

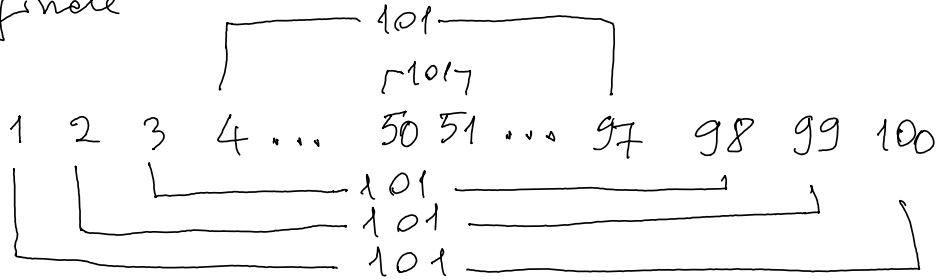
Per provare che ogni elemento di un insieme finito gode di una proprietà si può, per lo meno in linea teorica, esaminare l'uno dopo l'altro tutti i suoi elementi verificando che ciascuno di essi ne gode. Ovviamente, il numero degli elementi può essere così grande da rendere inattuabile tale programma, ma esso richiede comunque "solo" un numero finito di operazioni, seppure ingestibile: è un algoritmo! Lo stesso tipo di approccio è impossibile se si ha a che fare con insiemi infiniti, il più semplice dei quali è $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, l'insieme degli interi positivi.

Supponiamo di voler verificare che

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

È il conto che il piccolo Gauss fece a mente

per $n = 100$, mentre l'insegnante s'illudeva di tenerlo buono per un po' con le cento somme. Non daremo qui grande rilievo all'idea originale



da cui segue subito che la somma è $50 \times 101 = 5050$, molto più brillante di quella che presenteremo, ma ci serviremo di questo esempio "storico" per illustrare il meccanismo della prova per induzione. Il problema è che il vero teorema che vogliamo provare è

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}} \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

che comporta infinite verifiche, una per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il principio di induzione, incluso dal grande matematico Giuseppe Peano fra gli assiomi di $\mathbb{N}$, cioè fra le

proprietà caratteristiche che lo definiscono, asserisce che

<u>PRINCIPIO D'INDUZIONE</u>:

<u>Detta</u> $P(n)$ <u>una qualunque proprietà riguardante il numero naturale</u> n, <u>allora, se</u>

$$\begin{cases} P(1) \text{ è vera} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \text{ vera implica } P(n+1) \text{ vera,} \end{cases}$$

<u>ne segue</u>

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \text{ è vera.}$$

<u>NOTA</u>: la tesi è quella che ci interessa: la verifica di P per tutti gli interi n. Il principio d'induzione offre una via alternativa alla verifica diretta di $P(n)$ per ogni n, attraverso la verifica di due proprietà: la prima è la verifica diretta di P per il primo degli interi $P(1)$; la

seconda, che comporta infinite verifiche come $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$, richiede di provare che se P è vera per un certo intero n arbitrario, lo è anche per l'intero seguente $n+1$.
Talora – ed è la fortuna del principio di induzione – è più facile verificare

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

che verificare l'originale

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

La "dimostrazione" del principio d'induzione è immediata

$P(1)$ è vera, perché verificata per ipotesi

$P(1) \Rightarrow P(2)$, ponendo $n=1$ in $\forall n\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(2) \Rightarrow P(3)$, ponendo $n=2$ in $\forall n\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$P(n-1) \Rightarrow P(n)$ dopo $n-1$ passi si "raggiunge" $P(n)$.

Il punto citato è proprio quello per cui ogni numero intero può essere raggiunto, con un numero finito di passi, partendo da 1 e aggiungendo 1 ad ogni passo.
Tale proprietà è intuitiva, ma non consegue dalle altre quattro poste da Peano come assiomi per i numeri interi, e quindi è un assioma indipendente, che va aggiunto ad esse per definire $\mathbb{N}$.
Notiamo che verificare $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ può disorientare, all'inizio, lo studioso: in effetti, si assume per vero LO STESSO FATTO che si vuole provare, relativo però all'intero precedente. Torniamo all'esempio del piccolo GAUSS.

$$P(n) = \text{"}\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\text{"}$$

$P(1)$ è vero?

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad e \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \boxed{\text{SI}}$$

È vero che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n$,
e cioè che se è vero che

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ allora è

vero anche che $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \ ?$$

Beh, vediamo...

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) =$$

(visto che $P(n)$ è vero, $\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$)

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

$\boxed{\text{Sì}}$

Per il principio di induzione ne segue $P(n)$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, che è la tesi.

NOTA: Il principio d'induzione consente quando i venti siano favorevoli, di VERIFICARE una proprietà GIÀ NOTA, magari in casi particolari, ma che si vuole dimostrare in generale.

Nel caso della somma delle progressioni aritmetiche, il caso del piccolo Gauss, uno avrebbe potuto ragionare così: "In fondo, sto sommando n oggetti dei quali parecchi sono vicini ad n... e se la somma fosse un polinomio di secondo grado ($n \times n$) in n"?

Supporremo dunque $\sum_1^n k = an^2 + bn + c$.

Per determinare a, b, c, basta calcolare i valori della somma per **TRE** interi, come 1, 2 e 3.

$$1 = \sum_1^1 k = a + b + c$$

$$3 = \sum_1^2 k = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c$$

$$6 = \sum_1^3 k = a \cdot 9 + b \cdot 3 + c$$

Risolvendo il sistema lineare trovato

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases}$$

si ha

c	b	a		
1	1	1	1	
1	2	4	3	
1	3	9	6	
0	1	3	2	II − I
0	2	8	5	III − I
0	0	2	1	III − 2II
0	0	1	1/2	III/2
0	1	0	1/2	II − 3III
1	0	0	0	I − II − III

da cui $c=0$ $b=\frac{1}{2}$ $a=\frac{1}{2}$ e cioè

$$\sum_{1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n = \frac{n}{2}(n+1) \quad (n=1,2,3)$$

Questa è sì la congettura giusta, ma

è stata verificata solo per $n = 1, 2, 3$.
La prova per induzione precedente consiste di estenderne la validità ad ogni $n \in \mathbb{N}$.

In Algebra Lineare ci sono numerose questioni legate ai numeri interi: è intera la dimensione di uno spazio, è intero il numero di vettori di una combinazione lineare o di una base... Nulla di strano, quindi, che qua e là, a seconda del gusto matematico dell'esperitore, faccia capolino il principio d'induzione. Ci sono poi dei problemi che, inerentemente, coinvolgono il principio d'induzione, seppure in altro contesto. In Analisi, ad esempio, lo studio delle successioni definite per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = k \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(n, a_n) \end{cases}$$

utilizza sistematicamente l'induzione per provare che $a_n \in \operatorname{dom} f$ e, di conseguenza, per definire a_{n+1}, nota a_n.

Non si può non citare una successione ricorsiva celberrima: la successione di Fibonacci

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

cioè $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Fibonacci la introdusse per studiare la proliferazione dei conigli, ma questa è una altra storia...

Concludiamo con un omaggio a Giuseppe Peano, elencandone gli assiomi per $\mathbb{N}$.

Per definire $\mathbb{N}$ occorrono tre concetti primitivi:

- un insieme Ω, cioè i numeri
- lo zero, ω_0
- l'operazione di passaggio al successivo

in modo che siano verificati i seguenti

assiomi:

1) Zero è un numero

2) Il successivo di qualunque numero è un numero

Cioè, in sostanza

1) $\omega_0 \in \Omega$

2) $S : \Omega \to \Omega$

3) ω_0 non è il successivo di nessun numero, cioè

$$\nexists\, \omega \in \Omega \,;\; S(\omega) = \omega_0$$

4) Se due numeri hanno lo stesso successivo, allora sono uguali cioè

$$S(\omega) = S(\omega') \Rightarrow \omega = \omega'$$

e, dunque, il passaggio al successivo è una funzione iniettiva da Ω in Ω, ma non suriettiva, perché ω_0 non è nell'immagine.

5) <u>PRINCIPIO D'INDUZIONE</u>:

Se $\Sigma \subseteq \Omega$ verifica le proprietà

$$\begin{cases} \omega_0 \in \Sigma \\ \omega \in \Sigma \Rightarrow s(\omega) \in \Sigma \end{cases}$$

allora $\Sigma = \Omega$

Nel modello ordinario, $s(\omega) = \omega + 1$ e dunque, nelle applicazioni concrete, $\Sigma = \{n \in \mathbb{N} : P \text{ è verificata in } n\}$.

Le implicazioni logiche, il legame con la ricorsione, anche informatica, il perché $s(\omega) = \omega + 1$ non serva, in realtà, a definire $s(\omega)$ ma, al contrario, a

serve a dedurre $n+1$ e, di conseguenza, a definire la somma di interi, esula dall'ambito limitato di queste note. Per ogni approfondimento, il riferimento d'obbligo sono i testi di logica matematica.

Un'ultima curiosità per coloro i quali siano tentati di spiegare l'induzione nella prova di

$$\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

visto quanto sia più semplice e brillante la via del piccolo Gauss: perché non calcolare, piuttosto,

$$a_n = \sum_1^n k^2$$

È relativamente facile farlo con le tecniche qui presentate, mentre non è così evidente come farlo direttamente: è un risultato utile a calcolare direttamente l'integrale di Archimede, quello della parabola.