IL TEOREMA DI GRASSMANN SUL NUCLEO E L'IMMAGINE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE.

Lo scopo di queste note è di provare il seguente teorema di Grassmann:

TEOREMA: Sia $A : X \to Y$ lineare, con $\dim X < \infty$. Allora

$$\dim X = \dim \operatorname{Ker} A + \dim A(X)$$

Osservazione: il teorema, vero in ogni caso, ha un significato diverso nei tre casi:

1) $\dim A(X) = 0$
2) $\dim \operatorname{Ker} A = 0$
3) $\dim \operatorname{Ker} A > 0$ e $\dim A(X) > 0$

DIM.

CASO 1) $\dim A(X) = 0 \iff A(X) = \{0\}$.

In tal caso $A(x) = 0 \ \forall x \in X$ e dunque $\operatorname{Ker} A = X$ da cui segue immediatamente la tesi.

CASO 2) $\dim \operatorname{Ker} A = 0 \iff A$ è iniettiva

Sia $e_1 \dots e_n$ una base per X, che esiste perché X è di dimensione finita. Allora, $\forall x \in X \ \exists \alpha_1 \dots \alpha_n$ tali che

$$x = \sum_1^n \alpha_i e_i \quad \text{e da ciò} \quad A(x) = A\left(\sum_1^n \alpha_i e_i\right) = \sum_1^n \alpha_i A(e_i)$$

e dunque l'immagine di qualunque punto $x \in X$ è combinazione lineare degli n vettori $A(e_1) \dots A(e_n)$, ossia

$$A(X) = \langle A(e_1), A(e_2) \dots A(e_n) \rangle$$

e dunque $\dim A(X) \leq n$. Per provare l'uguaglianza, e di conseguenza la tesi, basta verificare l'indipendenza di $A(e_1), \dots, A(e_n)$, ma prima di farlo osserviamo esplicitamente che il semplice ragionamento precedente assicura, quand'anche Y fosse di dimensione infinita, così non è per $A(X) = \operatorname{Im} A$. Applicare ad uno spazio una applicazione lineare non può aumentarne la dimensione.

Per provarne l'indipendenza, consideriamo una combinazione nulla di $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)$

$$\sum \alpha_i A(e_i) = 0$$

Per la linearità di A, ne segue

$$A\left(\sum_1^n \alpha_i e_i\right) = 0$$

e poiché $\dim \operatorname{Ker} A = 0 \iff \operatorname{Ker} A = \{0\}$ ne segue

$$\sum_1^n \alpha_i e_i = 0$$

e dall'indipendenza di e_i segue $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Dunque $A(e_1) \dots A(e_n)$ è un sistema di generatori indipendenti di $A(X)$, e cioè una sua base, e ne segue $\dim A(X) = n$, da cui la tesi.

CASO 3) $\dim \operatorname{Ker} A > 0$ e $\dim A(X) > 0$.

In tal caso sia $w_1 \dots w_k$ una base per $\operatorname{Ker} A$. Dunque $\dim \operatorname{Ker} A = k > 0$.

Sia poi $x_{k+1} \dots x_n$ un completamento di $w_1 \dots w_k$ ad una base di X.

Per ogni $x \in X$ esistono $\alpha_1 \dots \alpha_k, \beta_{k+1} \dots \beta_n$ tali che $x = \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j$ da cui segue

$$A(x) = A\left(\sum_1^k \alpha_i w_i\right) + A\left(\sum_{k+1}^n \beta_j x_j\right) = \sum_{k+1}^n \beta_j A(x_j)$$

perché $w_i \in \operatorname{Ker} A$ e dunque $\sum \alpha_i w_i \in \operatorname{Ker} A$ e il primo termine si annulla. Ne consegue come prima che

$$A(X) = \langle A(x_{k+1}), A(x_{k+2}), \dots, A(x_n) \rangle$$

Proviamo come parte che $A(x_{k+1}) \ldots, A(x_n)$ sono indipendenti. Se si ha

$$\sum_{k+1}^{n} \lambda_j A(x_j) = 0$$

ne segue per linearità che

$$A\left(\sum_{k+1}^{n} \lambda_j x_j\right) = 0$$

e dunque $\sum_{k+1}^{n} \lambda_j x_j \in \operatorname{Ker} A$ e, essendo $w_1 \ldots w_k$ una base per $\operatorname{Ker} A$, esisteranno $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ tali che

$$\sum_{k+1}^{n} \lambda_j x_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i$$

Poiché $w_1 \ldots w_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ sono una base di X, e sono quindi indipendenti, ne segue che

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_n = 0$$

da cui l'indipendenza di $A(x_{k+1}), \ldots, A(x_n)$. Ne segue allora che $\dim A(X) = n-k$ e poiché $\dim \operatorname{Ker} A = k$ ne segue subito la tesi.

$\boxtimes$

Anche se è stato osservato nel corso della prova precedente, si ritiene utile enunciare separatamente il risultato già trovato, per la sua importanza teorica.

TEOREMA: Sia $A : X \to Y$, con A lineare e $\dim X = n < +\infty$.

Allora $\dim A(X) \leq n$.

A tale proposito si consideri l'applicazione

$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \cos t + \beta \sin t$$

definita su $\mathbb{R}^2$ a valori in $C^0(\mathbb{R})$. Anche se $C^0(\mathbb{R})$ è di dimensione infinita, non è così per $A(\mathbb{R}^2) = \langle \cos t, \sin t \rangle$, che è generato da $\cos t$ e $\sin t$ ed ha dunque dimensione 2.

In sostanza l'immagine di uno spazio di dimensione finita non può avere dimensione maggiore di quella del dominio, e può essere strettamente minore se e solo se $\dim \ker A > 0$, e cioè se A non è iniettiva.

Le applicazioni lineari iniettive (o "a fortiori" biiettive) sono quelle che conservano la dimensione del dominio nell'immagine: infatti, per un'applicazione iniettiva, il nucleo si riduce al solo 0 ed ha quindi dimensione 0, e dal teorema di Grassmann, la dimensione dell'immagine coincide con quella del dominio.