IL TEOREMA DI GRASSMANN SUI SOTTOSPAZI

Lo scopo della nota che segue è di provare il seguente teorema di Grassmann sulla relazione fra le dimensioni dei sottospazi somma ed intersezione e quelle dei sottospazi originali.

TEOREMA (GRASSMANN): Sia Z uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano X e Y due suoi sottospazi. Allora

$$\dim(X+Y)+\dim(X\cap Y)=\dim X+\dim Y$$

DIM. Se $\dim X=0$, e cioè $X=\{0\}$, segue subito $X+Y=Y$, $X\cap Y=\{0\}$, e dunque i due membri della tesi coincidono. Analogamente si ragiona se $\dim Y=0$

Supponiamo dunque $\dim X>0$ e $\dim Y>0$. Esaminiamo prima il caso in cui $\dim X\cap Y=0$. Siano $x_1 \dots x_n$ e $y_1 \dots y_m$ due basi per X e Y, che sono entrambi non ridotti solo a 0 e, essendo inoltre sottospazi di Z, sono di dimensione finita. Proveremo che

$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$$

è una base per $X+Y$, che avrà dunque dimensione $n+m$, il che è la tesi.

Sia dunque $v \in X+Y$, scelto ad arbitrio, e siano $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $x+y=v$. Poiché $\langle x_1 \dots x_n \rangle = X$ e $\langle y_1 \dots y_m \rangle = Y$ esisteranno α_i, $i=1..n$, e β_j, $j=1..m$, tali che

$$x = \sum_1^n \alpha_i x_i \quad e \quad y = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j$$

da cui segue subito

$$v = x+y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j y_j \in \langle x_1, .. x_n, y_1, .., y_m \rangle$$

e dunque il sistema $x_1 .. x_n, y_1, \dots, y_m$ genera $X+Y$. Per provare che è indipendente, e completare così la prova, siano $\lambda_1 \dots \lambda_n, \mu_1 \dots \mu_m$ tali che

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = 0$$

da cui

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = - \sum_{j=1}^m \mu_j y_j$$

e proveremo che $\lambda_i = 0$, $i=1..n$, e $\mu_j = 0$, $j=1..m$.
Detto w il valore comune dei due membri, risulta

$$w = \sum_1^n \lambda_i x_i \in \langle x_1 \dots x_n \rangle = X$$

ma anche

$$w = - \sum_1^m \mu_j y_j \in \langle y_1 \dots y_m \rangle = Y$$

e dunque $w \in X \cap Y$; poiché $\dim X \cap Y = 0$, ne segue $w=0$, da cui $\sum_1^n \lambda_i x_i = 0$ e $\sum_1^m \mu_j y_j = 0$ e, per l'indipendenza degli $x_1 \dots x_n$ e degli $y_1 \dots y_m$, ne segue $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ e $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 0$, e quindi l'indipendenza di $x_1 \dots x_n, y_1, \dots, y_m$, e la tesi.

Sia ora $\dim X \cap Y > 0$, e sia $w_1 \dots w_k$ una base per $X \cap Y$. Sia $w_1 \dots w_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ un completamento ad una base di X e $w_1, \dots, w_k, y_{k+1}, \dots, y_m$ uno ad una base di Y. Verrà provato che

$$w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n, y_{k+1}, \dots, y_m$$

è una base per $X+Y$, da cui

$$\dim X+Y = k + (n-k) + (m-k) = n+m-k$$

ed essendo $\dim X \cap Y = k$, $\dim X = n$ e $\dim Y = m$, ne seguirà la tesi.

Analogamente a quanto visto prima, se $v \in X+Y$, $\exists x \in X$ e $y \in Y$ $v = x+y$, da $x \in X = \langle w_1 \dots w_k, y_{k+1}, \dots, y_n \rangle$ e $y \in Y = \langle w_1 \dots w_k, y_{k+1}, \dots, y_m \rangle$ segue che

$$v = x+y = \underbrace{\sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j}_{x} + \underbrace{\sum_1^k \alpha_i' w_i + \sum_{k+1}^m \beta_h' y_h}_{y}$$

e il secondo membro appartiene a $\langle w_1 \dots w_k, x_{k+1} \dots, x_n, y_{k+1}, \dots y_m \rangle$.

Per provare l'indipendenza di tali generatori, e completare così la dimostrazione, siano $\alpha_i, \beta_j, \gamma_h$ tali che

$$\sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j + \sum_{k+1}^m \gamma_h y_h = 0 \quad (*)$$

e proveremo che risultano tutti nulli.

Infatti, si ha

$$\sum_{1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^{n} \beta_j x_j = - \sum_{k+1}^{m} \gamma_h y_h$$

e, detto w il valore comune dei due membri si ha che $w \in X \cap Y$, in quanto il primo membro appartiene ad X ed il secondo ad Y.

Poiché $w_1 \dots w_k$ è una base per $X \cap Y$, e $w \in X \cap Y$ esisteranno α_i' tali che

$$w = \sum_{1}^{k} \alpha_i' w_i \qquad (**)$$

e poiché $w_1 \dots w_k, x_{k+1}, \dots x_n$ è una base di X, per l'unicità delle coordinate rispetto a tale base, da $(**)$ e da $w = \sum_{1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^{n} \beta_j x_j$ segue $\alpha_i' = \alpha_i$, $i = 1..k$, e $\beta_j = 0$, $j = k+1, .., n$. Sostituendo $\beta_j = 0$ in $(*)$ si ottiene poi

$$\sum_{1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^{m} \gamma_h y_h = 0$$

e infine, per l'indipendenza di $w_1 \dots w_k, y_{k+1} \dots y_m$, che sono una base di Y, segue $\alpha_i = 0$ $i = 1..k$ e $\gamma_h = 0$, $h = k+1, .., m$. Ciò, assieme a $\beta_j = 0$, implica l'indipendenza e la tesi.

$\boxed{//}$

Il teorema di Grassmann fornisce un corollario interessante nel caso in cui la somma $X + Y$ sia diretta.

In tal caso, infatti, si sa che $X \cap Y = \{0\}$ e dunque

$$\dim X \oplus Y + \dim X \cap Y = \dim X + \dim Y$$

diventa

$$\dim X \oplus Y = \dim X + \dim Y$$

Vale dunque il:

TEOREMA: se $X + Y = X \oplus Y$, allora

$$\dim X \oplus Y = \dim X + \dim Y$$

La condizione $X \cap Y = \{0\}$ è talvolta semplice da verificare. Per esempio, se X e Y sono autospazi relativi ad autovalori distinti di un operatore, la condizione $X \cap Y = \{0\}$ è conseguenza immediata di un teorema generale, non banale, ma già noto!

Si osservi che, per i sottospazi di $\mathbb{R}^n$, è abbastanza agevole il calcolo delle dimensioni che appaiono nella tesi, la quale permette di calcolarne una di esse una volta calcolate le altre tre.

Come è stato già mostrato altrove, l'algoritmo di Gauss consente, con fatica ragionevole, di estrarre da sistemi di generatori delle basi, o di costruire generatori per lo spazio intersezione o per la somma.

Una curiosità: due piani per l'origine (sottospazi) in $\mathbb{R}^3$ si intersecano sempre in una retta (se non coincidono).
Infatti, detti X e Y i due sottospazi si ha $\dim X = \dim Y = 2$ e dunque se $X+Y = \mathbb{R}^3$ allora $3 + \dim X\cap Y = 2+2$ da cui $\dim X\cap Y = 1$ (una retta).
Per poter avere due piani che si intersecano solo nell'origine occorrono 4 dimensioni

$$\dim X+Y + \underbrace{\dim X\cap Y}_{0} = \underbrace{\dim X + \dim Y}_{2\,+\,2}$$

e dunque

$$\boxed{\dim X+Y = 4}$$

Il discorso è più delicato per gli spazi di funzioni, dove il problema di stabilire se una funzione appartenga allo span di alcune altre è più delicato, e solo parzialmente risolubile mediante il determinante di WRONSKIJ o wronskiano.