GAUSS - JORDAN

Titolo nota 21/04/2012

APPENDICE :

OSSERVAZIONI SULLA PERMUTAZIONE DI RIGHE O DI COLONNE NELL'ALGORITMO DI GAUSS-JORDAN

La nota seguente intende precisare come si possano impiegare con vantaggio le permutazioni di righe o colonne per semplificare le operazioni richieste nell'algoritmo di Gauss-Jordan, così come accade nell'algoritmo di eliminazione di Gauss con sostituzione all'indietro, con particolare interesse al calcolo dell'inversa di una matrice.

Sia dunque $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ invertibile e osserviamo che $Ax=b$ cioè

$$
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & \cdots & x_n & \\
a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 & & & \vdots \\
a_{n1} & & a_{nn} & b_n
\end{array}
$$

ha soluzione unica e dunque ogni variabile sarà pivot e il sistema potrà essere ridotto alla forma triangolare

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\
0 & \tilde{a}_{22} & & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots 0 & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n
\end{array}\right)
$$

Cosa accade se si operano scambi di righe?

Le soluzioni resteranno identiche e dunque, continuando con l'algoritmo di Gauss_Jordan, il sistema diventerà

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ 1 & & & 0 & \tilde{\tilde{b}}_1 \\ & 1 & & & \tilde{\tilde{b}}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \tilde{\tilde{b}}_n \end{array} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x_1 = \tilde{\tilde{b}}_1 \\ x_2 = \tilde{\tilde{b}}_2 \\ \vdots \\ x_n = \tilde{\tilde{b}}_n \end{cases}$$

e tale soluzione sarà identica a quella del sistema originale. Dunque si possono eseguire scambi <u>DI RIGHE</u> in numero arbitrario senza dover modificare l'algoritmo.

Gli scambi di colonne richiedono le consuete precauzioni, meglio illustrate con un esempio. Se il sistema originale viene trasformato nel seguente dopo diversi scambi di colonne

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_5 & x_3 & x_2 & x_4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{b}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \tilde{b}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{b}_5 \end{array}$$

le soluzioni corrispondenti saranno

$$\boxed{x_1 = \tilde{b}_1 \quad x_5 = \tilde{b}_2 \quad x_3 = \tilde{b}_3 \quad x_2 = \tilde{b}_4 \quad x_4 = \tilde{b}_5}$$

e dunque, nel "leggere" la soluzione nel vettore a secondo membro occorrerà tenere conto delle permutazioni effettuate sulle incognite.

L'operazione può risultare macchinosa nel caso del calcolo della matrice inversa, che comporta la risoluzione di un sistema con n termini noti, ma con matrici piuttosto ricche di zeri (dall'inizio o che diventano tali durante il corso dell'algoritmo) può risultare comunque vantaggioso.

<u>IN CONCLUSIONE</u>: nella versione di Jordan dell'algoritmo di Gauss si possono impiegare senza alcun accorgimento gli scambi di righe, mentre per impiegare quelli di colonne occorre tenere traccia della permutazione di incognite corrispondente, esattamente come si fa nell'algoritmo di Gauss originale, con sostituzione all'indietro.