

FUNZIONI IPERBOLICHE

(Pierdo Longo 12/7/2019)

Lo scopo di queste note è di presentare la identità più utili che coinvolgono le funzioni iperboliche, che seguono da vicino quelle analoghe della trigonometria riguardando le funzioni circolari (seno e coseno).

DEFINIZIONI DI $\sinh t$ E $\cosh t$

(seno iperbolico e coseno iperbolico)

Diversamente da quelle circolari, le funzioni iperboliche dei seno direttamente dall'esponenziale reale. Si pone, infatti

$$\cosh t = \frac{1}{2} [e^t + e^{-t}] \quad \sinh t = \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}]$$

da cui segue, sommando o sottraendo

$$e^t = \cosh t + \sinh t \quad e^{-t} = \cosh t - \sinh t$$

Queste identità ricordano da vicino quelle di Eulero che, legando, nel campo complesso, le funzioni circolari (seno e coseno) e l'esponentiale complesso.

L'IDENTITÀ FONDAMENTALE

Si osserva subito che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Infatti:

$$\frac{1}{4} \left[e^{2t} + e^{-2t} + 2 \right] - \frac{1}{4} \left[e^{2t} + e^{-2t} - 2 \right] = 1,$$

e dunque il punto in $\mathbb{R}^2$ definito da $(\cosh t, \sinh t)$ è un punto appartenente all'iperbole $x^2 - y^2 = 1$: ciò giustifica il nome di funzioni iperboliche. Come per le

funzioni circolari, la cosa più difficile è di capire cosa rappresentano, che risulterebbe essere la lunghezza di un opportuno arco di circonferenza o, nel nostro caso, di iperbole concava, mentre l'ascissa è l'ordinata del punto estremo di quell'arco, individuando il coseno iperbolico e il seno iperbolico.

Un'applicazione utilissima dell'identità appena provata verrà mostrata non appena avremo provato le formule di derivazione per le funzioni iperboliche che seguono.

DERIVATE DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

Dalle regole di derivazione elementari, e dalle loro definizioni, segue subito che

$$(\cosh t)' = \sinh t \quad (\sinh t)' = \cosh t$$

Anche qui si revisionano notevoli somiglianze, ma anche importanti differenze con quelle di seno e coseno.

UNA PRIMA APPLICAZIONE NOTEGVOLE

Se si vuole calcolare una primitiva di $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, f' uno dei normali "trucchi" non fa che miseramente (provare per credere!).

Le funzioni iperboliche consentono invece una soluzione agevole del problema, mediante il cambio di variabile $t = \sinh x$. Infatti, dall'identità fondamentale, si ha

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2} dt &= \int \sqrt{1+\sinh^2 x} \cosh x dx = \int \cosh^2 x dx = \\ &\stackrel{t=\sinh x}{=} \int \cosh x | \cosh x | dx > 0 \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{4} [e^{2x} + e^{-2x} + 2] dx = \frac{1}{2} \int \cosh 2x + 1 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{1}{2} x$$

Una formula davvero semplice!

Se si vuole, invece, una primitiva di $\sqrt{t^2-1}$ (per $|t| > 1$, naturalmente) basta operare la sostituzione $t = \cosh x$, da cui

$$\int \sqrt{t^2-1} \, dt = \int \sqrt{\cosh^2 x - 1} \sinh x \, dx =$$

$$\begin{aligned} t &= \cosh x \\ dt &= \sinh x \, dx \end{aligned}$$

$$= \int |\sinh x| \sinh x \, dx$$

Poiché si veri fice immediatamente dalla definizione che $\sinh x > 0$ se $x > 0$, $\sinh 0 = 0$, e $\sinh x < 0$ se $x < 0$, ne segue che occorre qualche precauzione in più ma, in ogni caso, una primitiva di $\sinh^2 x$ si può trovare allo stesso modo del caso precedente.

NOTE DI COLORE

Osserviamo che

$$1) \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x$$

$$3) \cosh 0 = 1 \leq \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4) \sinh x \text{ è strettamente crescente su } \mathbb{R}, \text{ perché } (\sinh x)' > 0.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty.$$

Il grafico di $f(x) = \cosh x$ rappresenta la curva descritta da una catena sospesa fra i punti (ad esempio) $(1, \cosh 1)$ e $(-1, \cosh 1)$: per tale ragione, tale curva è chiamata CATENARIA.

FORMULE DI DUPLICAZIONE

Notiamo che, dalla definizione,

$$\sinh 2t = \frac{1}{2} (e^{2t} - e^{-2t}) = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t})$$

da cui segue subito

$$\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$$

Inoltre,

$$\cosh 2t = \frac{1}{2} (e^{2t} + e^{-2t}) = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t})^2 - 1$$

da cui

$$\cosh 2t = 2 \cosh^2 t - 1$$

e, dall'identità fondamentale, anche

$$\cosh 2t = 1 + 2\sinh^2 t$$

da cui, in fine,

$$\cosh^2 t = \frac{1}{2} (\cosh 2t + 1)$$

e

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2} (\cosh 2t - 1)$$

Anche qui, occhio alle impercettibili, importanti differenze con le analoghe formule per $\sin x$ e $\cos x$.

INVERSE DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

La possibilità di definire l'inversa per una funzione continua dipende di individuare (e scegliere) un intervallo su cui è strettamente crescente. Tale scelta è semplicissima per il seno iperbolico, che è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, in quanto la sua derivata, il coseno iperbolico, è strettamente positiva dappertutto.

Esiste dunque un'inversa globale, il SETTORE DEL SENO IPERBOLICO (in simboli $\text{settsinh}t$, un tempo, ma ora sempre più di frequente $\sinh^{-1}t$), che è anche facile da esprimere usando le ordinarie funzioni elementari. In effetti, il numero $\sinh^{-1}y$ è l'unica soluzione dell'equazione

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

da cui, moltiplicando per e^x si ha

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

che ha soluzioni

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Essendo $|y| < \sqrt{y^2 + 1}$, si ha $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$, da cui segue

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Dunque

$$\sinh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Per quanto attiene al cosh, risulta strettamente crescente per $x > 0$, ove la sua derivata $\sinh x > 0$, e strettamente decrescente per $x < 0$. Così come accade per definire la radice, è tradizione supporre

per l'intervallo $[0, +\infty[$, che ha per immagine $[1, +\infty[$.

Dunque, per y fissato $y \in [1, +\infty[$, si definirà $\cosh^{-1} y$ come l'unica soluzione positiva (o nulla) dell'equazione

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

come prima, moltiplicando per e^x , si ha

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

e dunque

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

a cui corrispondono le due possibili soluzioni

$$x = \log(y - \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{e} \quad x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Essendo il logaritmo strettamente crescente, per verificare

che la prima è negativa e la seconda positive basta verificare che

$$y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1 \quad \text{e} \quad y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$$

che sono immediate, purché $y \geq 1$ e perché

$$y - 1 \leq \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{equivale a} \quad y^2 + 1 - 2y \leq \cancel{y^2} - 1$$

e cioè $2 \leq 2y$, che è vero per $y \geq 1$.
Si ha dunque

$$\cosh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

ATTENZIONE: il secondo membro è definito per $|y| > 1$,
ma esprime l'inversa del coseno iperbolico solo per
 $y > 1$. Occhio ai soliti problemi!

$$x = \sqrt{x^2} \quad \text{e} \quad x = \arcsin(\sin x) \quad \text{sono FALSE}$$

in $\mathbb{R}$, mentre sono **VERE** negli intervalli appropriati di invertibilità: $[0, +\infty[$ per $x \rightarrow x^2$ e $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per $x \rightarrow \sin x$.
Inoltre:

$$\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2 \quad \text{e} \quad \arcsin \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

che è diverso da $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$.

Analogamente $\cosh^{-1}(\cosh x) = x$ solo se $x \in [0, +\infty[$,
mentre vale $-x$ se $x < 0$. In definitiva

$$\cosh^{-1}(\cosh x) = |x|$$

ALCUNE SEMPLIFICAZIONI

La grande ridondanza delle funzioni iperboliche, così come di quelle circolari, consente di semplificare alcune espressioni. Piuttosto che anche solo addurre una costanza, ci limiteremo a qualche esempio per illustrare il modo di procedere.

Troviamo un'espressione semplificata per $\sinh(2\sinh^{-1}t)$. Se si riuscisse ad esprimere la funzione $t \rightarrow \sinh t$ mediante il solo $\sinh t$, il fatto che esso venga calcolato su $\sinh^{-1}t$ permetterebbe di farli ipersu entrambi. In effetti, è proprio così! =

Dalla formula di duplicazione del seno iperbolico, segue

$$\sinh[2(\sinh^{-1}t)] = 2 \sinh(\sinh^{-1}t) \cosh(\sinh^{-1}t)$$

Dall'identità fondamentale, $\cosh s = \sqrt{1 + \sinh^2 s}$, da cui

$$\text{per } s = \sinh^{-1}t, \text{ si ha } \boxed{\sinh(2\sinh^{-1}t) = 2t\sqrt{1+t^2}}.$$

Altri semplici esempi sono

$$e^{\sinh^{-1} t} = t + \sqrt{1+t^2}$$

$$e^{\cosh^{-1} t} = t + \sqrt{t^2 - 1}$$

che derivano direttamente dalle formule di $\sinh^{-1}$ e $\cosh^{-1}$.
Una conseguenza dell'identità $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ fondamentale è

$$\cosh(\sinh^{-1} t) = \sqrt{1+t^2}$$

ed anche essendo $\cosh^{-1} t \in [0, +\infty[$ e dunque $\sinh(\cosh^{-1} t) > 0$,

$$\begin{aligned} \sinh(\cosh^{-1} t) &= \sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} t) - 1} = \\ &= \sqrt{t^2 - 1} \end{aligned}$$

Si è già fatto cenno alla ridondanza delle definizioni delle funzioni iperboliche (e di quelle circolari). È quindi possibile ottenere, per via diverse, espressioni molto differenti dello stesso risultato.

Nulla vieta, di fronte a simili diverse espressioni, di compiere una verifica veloce con una calcolatrice per un po' di valori e poi, eventualmente, tentare di determinare le trasformazioni dell'una nell'altra, come è stato fatto in queste sezioni.

UNA CLASSE DI FUNZIONI ELEMENTARMENTE INTEGRABILI

Abbiamo già osservato in precedenza che le funzioni $\sqrt{1+t^2}$ e $\sqrt{t^2-1}$ si possono opportunamente integrare con un'opportuna sostituzione che impiega le funzioni iperboliche. Analogamente, la funzione $\sqrt{1-t^2}$ può essere integrata impiegando quelle circolari. Infatti

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \int \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx =$$

$$t = \sin x$$

$$dt = \cos x dx$$

$$= \int |\cos x| \cos x dx$$

e, con un po' di precauzioni sul segno, basta calcolare una primitiva di $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$, il che è immediato.

Naturalmente, nulla vieta di operare la sostituzione

$$t = \cos x \text{ ed usare poi la formula } \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1);$$

a seconda dell'insieme d'integrazione, e del segno del seno o del coseno in d'esse, può essere più utile l'uno o l'altre delle sostituzioni.

Dunque, sappiamo come procedere per $\sqrt{t^2 \pm 1}$, $\sqrt{t^2 - 1}$, $\sqrt{1 - t^2}$ mentre non ci si deve dare pena per $\sqrt{-1 - t^2}$, perché non definisce alcuna funzione. I risultati ottenuti possono sembrare miserelli, ma non è così. Ricordando che, supposto $a \neq 0$, si ha

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) =$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

osserviamo che (oltre a dimostrare immediatamente la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado) si può scrivere il trinomio $ax^2 + bx + c$ nella forma

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \alpha \quad \left(\alpha = -\frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

e cambiando variabile (a costo zero) ponendo $x + \frac{b}{2a} = y$, il trinomio diventerà somma o differenza di quadrati, e secondo del segno di Δ e di a , con espressioni molto vicine a quelle già trattate. Per ridurci a quelle, basta raccogliere in evidenza $|a|$, in modo che il "termine noto" diventi 1 o -1, ottenendo

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{|a|} \sqrt{\frac{a}{|a|} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\alpha}{|a|}}$$

A seconda del segno di a e di α , ci si riconduce facilmente ai casi già trattati. Esaminiamo alcuni esempi...

$$1) \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4 \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right)} = 2 \sqrt{\left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1}$$

e, ponendo $\frac{x}{2} = y$, ci si riconduce al caso $\sqrt{y^2 + 1}$

Purpure

$$\int \sqrt{x^2 + 4} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \, dx \quad \underline{\underline{\frac{x}{2} = y}}$$

$$= 2 \int \sqrt{y^2 + 1} \, 2dy \quad dx = 2dy$$

e con la sostituzione $y = \sinh u$ si determinano facilmente una primitiva, come illustrato prima.

$$2) \sqrt{x^2 + 2x + 5} = \sqrt{(x+1)^2 + 4} = 2 \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} \quad \text{che, con la sostituzione } y = \frac{x+1}{2} \text{ ridiventa il caso } \sqrt{y^2 + 1}$$

$$3) \sqrt{2x^2 - 2x - 3} = \sqrt{2} \sqrt{x^2 - x - \frac{3}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{7}}{2} \sqrt{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{4}{7}}\right]^2 - 1}$$

che si riduce al caso $\sqrt{y^2 - 1}$, ponendo $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}}$.

$$4) \sqrt{-x^2 + 2x - 2} = \sqrt{-(x^2 - 2x + 2)} = \sqrt{-(x-1)^2 + 1}$$

che non è definito, perché l'argomento è strettamente negativo.

$$\begin{aligned} 5) \sqrt{-4x^2 - 2x + 1} &= 2 \sqrt{-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} = \\ &= 2 \sqrt{-(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4})} = 2 \sqrt{-(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{5}{16}} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{1 - \left[\sqrt{\frac{16}{5}}(x + \frac{1}{4})\right]^2} \end{aligned}$$

che, dopo la sostituzione $y = \frac{4x}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$, si riduce al caso $\sqrt{1-y^2}$, da affrontare con le sostituzioni $y = \sin u$ oppure $y = \cos u$.

L'appartenenza delle funzioni iperboliche sarebbe dovuta
"iperboliche" e il loro scopo fosse soltanto quello di
integrare le radici dei polinomi di secondo grado.

Consideriamo il caso $f(x) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x^2+2}$

Sì può pensare ad f come alla funzione composta
della funzione

$$g(s, t) = \frac{s+t}{s^2+2} \quad (\text{rapporto di polinomi in } s \text{ e } t)$$

con le funzioni $s = x$ e $t = \sqrt{1+x^2}$

Operando la sostituzione $x = \sinh u$, si ha

$$f(\sinh u) = \frac{\sinh u + \cosh u}{\sinh^2 u + 2};$$

sostituendo a $\sinh u$ e $\cosh u$ le loro espressioni

in funzione di u e ponendo poi $e^u = v$ ne segue subito che, rispetto a v , f risulta razionale, e quindi eventualmente integrabile. Il "metodo" funziona per tutte le funzioni composte di una funzione razionale, rapporto di polinomi in s e t , e delle funzioni $s = x$ e $t = \sqrt{1+x^2}$.

Stesso discorso può riferirsi per $f(x) = \frac{p(x, \sqrt{x^2-1})}{q(x, \sqrt{x^2-1})}$, con p e q polinomi in due variabili, oppure al caso, ad esempio

$$f(x) = \frac{p(\sqrt{x-1}, \sqrt{x+1})}{q(\sqrt{x-1}, \sqrt{x+1})}$$

perché, ponendo $\sqrt{x-1} = t$, ne segue $x = t^2 + 1$ da cui $\sqrt{x+1} = \sqrt{t^2+2}$ e infine

$$f(t) = \frac{p(t, \sqrt{t^2+2})}{q(t, \sqrt{t^2+2})} \quad \text{da trattare come prima!}$$

In definitiva, tutte le funzioni razionali che, oltre alla variabile indipendente, coinvolgono una radice d'un polinomio di secondo grado si possono approntare, dopo opportuni cambiamenti di scale, con una sostituzione che consenta qualche delle funzioni circolari o iperboliche. Abbiamo anche visto che funzioni razionali di due diversi radicali di primo grado possono essere ricondotte al caso precedente, assumendo uno di tali radicali come variabile indipendente.

Ricordiamo ancora l'ultima delle differenze con le funzioni circolari. Una funzione razionale di $\sin t$ e $\cos t$ si vede, per la "razionalizzazione", l'uso delle formule parametriche che esprimono $\sin t$ e $\cos t$ in funzione di $u = \tan \frac{t}{2}$. Per le funzioni iperboliche, invece, basta usare le loro definizioni e la sostituzione $e^t = u$, come visto più an-

CONCLUSIONE

Non è possibile, nell'ambito limitato di una dispo-
"sizione", fornire altri dettagli sui problemi sotto st-
le poche questioni presentate. Uno dei problemi impo-
tanti della prima geometria algebrica, l'esistenza di
una parametrizzazione razionale per le curve algebriche,
è direttamente legato al contenuto di queste note
(la nostra curva è l'iperbole $x^2 - y^2 = 1$) ed è legato
al concetto di integrale abeliano (del nome del
matematico norvegese Niels Abel).

Nell'800, matematici brillantissimi fecero a gara
ad individuare nuove funzioni "elementari", diverse al-
terare del problema trattato, fra le quali spiccano
le funzioni e gli integrali ellittici di C. G. Jacob
Jacobi su quel, però davvero non possiamo soffermarci.