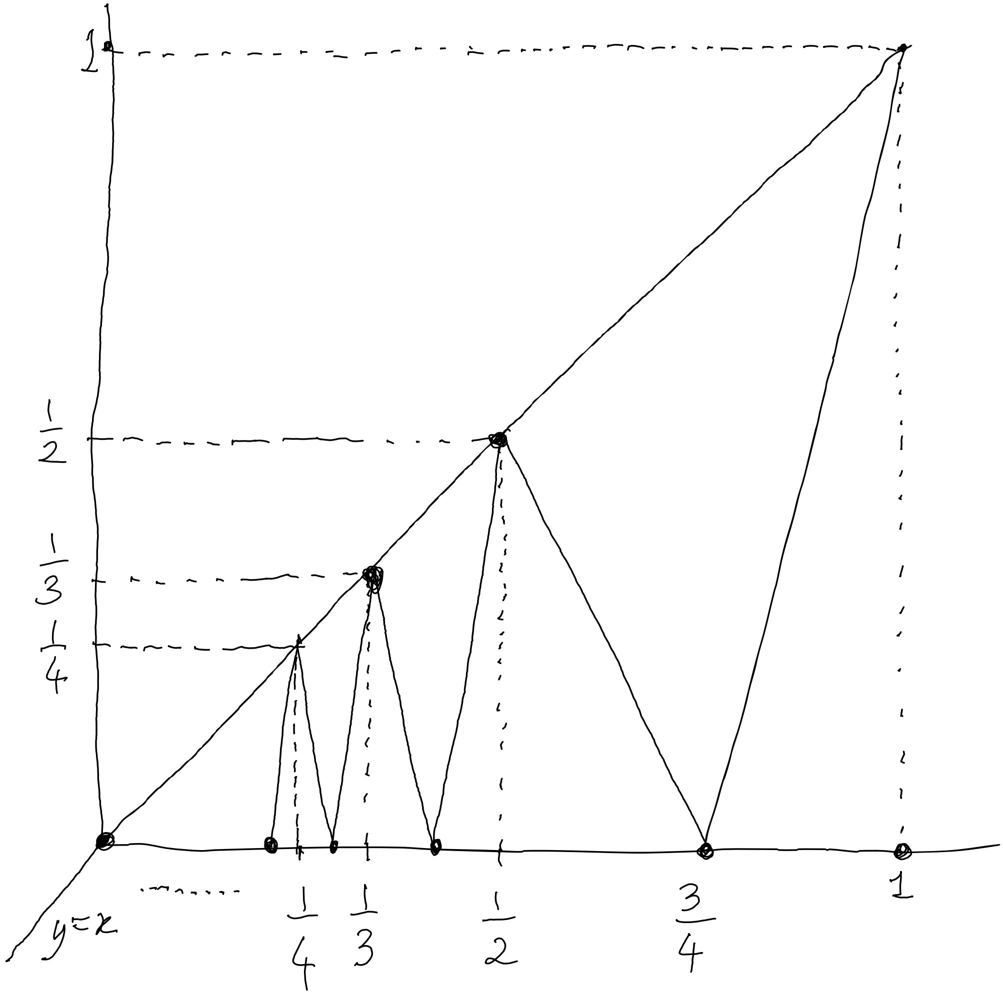
UNA CURVA CONTINUA NON RETTIFICABILE (14-5-2020)

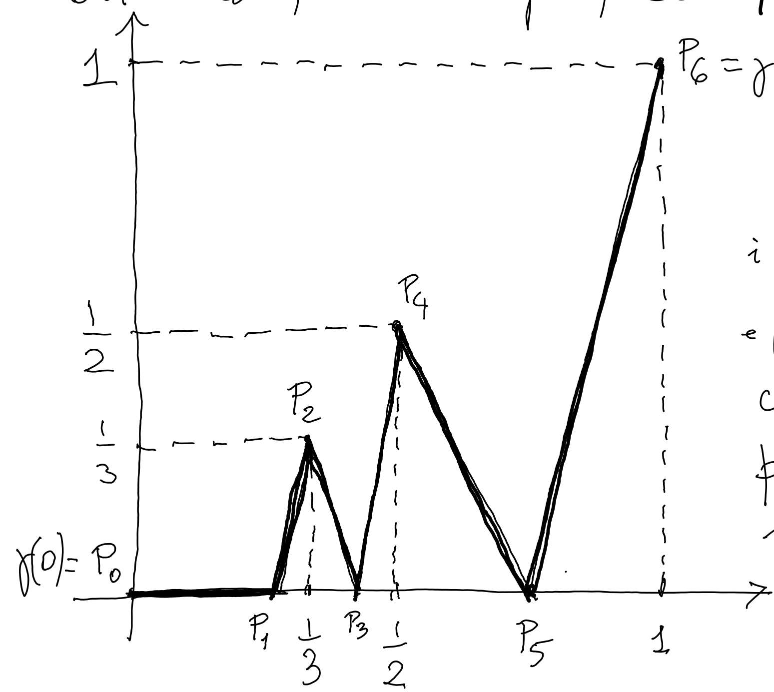
L'esempio seguente riprende quello classico $\gamma(t) = (t, t\sin\frac{1}{t})$ per $t \in [0, \frac{2}{\pi}]$ prolungato con $\gamma(0) = (0,0)$, semplificandone alquanto alcuni aspetti.
Si consideri $[0,1]$ e, in esso, la successione $a_n = \frac{1}{n}$, che è decrescente e tende a zero.

Fra ogni coppia di punti consecutivi $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n}$ intercaliamo ad arbitrio un punto come, ad esempio, il loro punto medio $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right] =$
$= \frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}$

Per definire la curva dell'esempio congiungeremo con un segmento ogni punto $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ con i punti sull'asse x che hanno come ascisse i punti medi degli intervalli che hanno $\frac{1}{n}$ per estremo. Si ottiene



Per scrivere esplicitamente la funzione il cui grafico è quello illustrato occorrerebbe scrivere le equazioni parametriche dei segmenti. Ad esempio, quello fra $(1,1)$ e $\left(\frac{3}{4},0\right)$, $f(t)=\left(\frac{3}{4},0\right)+t\left(\frac{1}{4},1\right)$, definisce la f sull'intervallo $\left[\frac{3}{4},1\right]$, e così via per gli altri intervalli, ponendo infine $f(0)=0$. Non occorre, però dorsi tante pure. Infatti, i vertici delle "spezzate" così definite sono noti ed è facile stimarne la lunghezza. Basta solo considerare lo zero assieme agli n punti più grandi sopra costruiti, ottenendo, ad esempio, la **spezzata (vera) inscritta**:



che include $(0,0)$, i punti $(1,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, e i corrispondenti punti intercalati sull'asse x.

La stima della lunghezza è immediata: i due lati della spezzata incidenti in $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ sono entrambi più lunghi della altezza del triangolo, $\frac{1}{n}$ e, dunque il contributo dei primi n triangoli è strettamente maggiore di $\sum_1^n \frac{1}{k}$, avendo pure ignorato il tratto iniziale orizzontale uscente da $(0,0)$.

Dalle proprietà della serie armonica segue subito che

$$\sup_n \sum_1^n \frac{1}{n} = +\infty$$

e dunque

$$\Lambda(\gamma) = +\infty.$$

D'altronde, poiché $0 \leq f(x) \leq x$ ne segue che $\lim_0 f = 0 = f(0)$, e dunque la funzione definita all'inizio è continua, e la curva $\gamma(t) = (t, f(t))$ fornisce il controesempio cercato.

NOTA: la f NON definisce una spezzata, perché i suoi vertici sono infiniti, mentre dovrebbero essere le immagini del numero finito di punti $t_0, t_1, \dots, t_n$. Le poligonali inscritte usate per le stime utilizzano solo la parte destra del tracciato, completandola con il tratto orizzontale (a sinistra) che elimina tutta la coda della successione $\frac{1}{n}$.

L'esempio classico esposto in un altro contributo, $\gamma(t) = (t, t\sin\frac{1}{t})$ e $\gamma(0) = (0,0)$, si presta ad interessanti osservazioni. Ad esempio, se si considera

$$\begin{cases} \sigma(t) = (t, t^2 \sin\frac{1}{t}) \\ \sigma(0) = (0,0) \end{cases}$$

la curva, molto simile, è rettificabile perché per effetto del fattore t^2 è di classe C^1. Non a caso la serie, stavolta, sarebbe $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$ che converge ma, essendo una stima del basso, ciò non implicherebbe nulla sulla rettificabilità.

Le condizioni caratteristiche per la rettificabilità di una curva sono state stabilite all'inizio del XX secolo e conducono alla teoria delle funzioni a variazione limitata (BV o Bounded Variation) alla quale la matematica italiana ha dato contributi importanti.

CURVA DI KOCH
(FIOCCO DI NEVE)

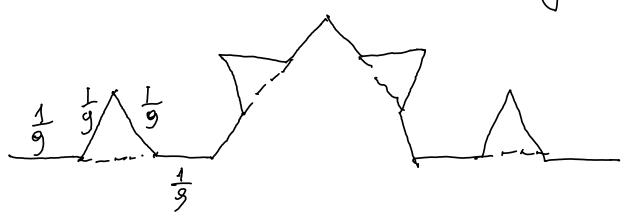
$N=0$

sostituendo al terzo centrale una spezzata equilatera

$N=1$

Operando allo stesso modo con ogni lato

$N=2$



e così via all'infinito....

Ad ogni passo, la lunghezza della spezzata viene moltiplicata per $4/3$ e, dunque al divergere di N, la lunghezza diverge.
La teoria della convergenza uniforme delle serie di funzioni totalmente convergenti assicura che le spezzate costruite più su convergano ad una curva continua.
Le spezzate usate per definirla sono tutte inscritte, e dunque la sua lunghezza è infinita.