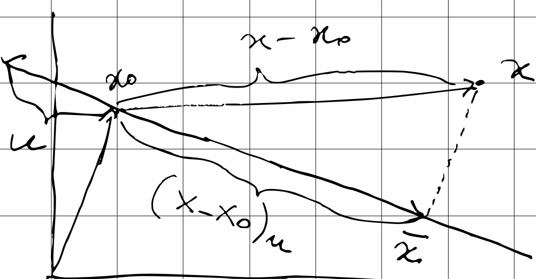
ERRATA - CORRIGE PER LA DISPENSA G_1.5

(11-10-2019)

La dispensa G_1.5 è dedicata ai problemi riguardanti le distanze, fra i quali è importante il caso del calcolo della distanza di un punto da una retta parametrica.



La distanza del punto x dalla retta $x_0 + tu$ è definita come la distanza minima fra x e i punti della retta, che può essere calcolata agevolmente usando le proprietà della proiezione.

In effetti, ponendo $\bar{x} = x_0 + (x - x_0)_u$, si ottiene che $x - \bar{x} = (x - x_0) - (x - x_0)_u$ è ortogonale ad u per il teorema della proiezione, e dunque $\bar{x}$ è il punto della retta di minima distanza da x. La distanza cercata, $|x - \bar{x}|$, si può calcolare determinando prima $\bar{x}$, e poi valutando la norma $|x-\bar{x}|$, come è mostrato nell'esempio presentato nelle dispense G_1.5. Mentre l'esempio utilizza la formula corretta, la formula che lo precede nelle dispense è errata. Quella corretta, utilizzata nell'esempio e descritta in questa breve nota, è:

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \neq 0,$$

$$r = \{ x_0 + tu : t \in \mathbb{R} \} \text{ retta parametrica}$$

$$\boxed{d(x, r) \equiv d(x, \bar{x}) = \left| x - x_0 - (x - x_0)_u \right|}$$

Questa formula si può anche far derivare direttamente dallo studio del triangolo rettangolo di vertici x_0, $\bar{x}$ e x, di cateti $\bar{x} - x_0$ e $(x - x_0) - (\bar{x} - x_0) = (x - \bar{x})$ e ipotenusa $x - x_0$. Dal teorema di Pitagora si può ricavare la formula, di regola più macchinosa nell'impiego,

$$d(x, r) = \sqrt{|x - x_0|^2 - |(x - x_0)_u|^2} = \sqrt{|x - x_0|^2 - \frac{[(x - x_0) u]^2}{|u|^2}}.$$

UN ULTERIORE ESEMPIO

L'esempio presentato nelle dispense 6.1.5 è semplificato dal fatto che la proiezione da calcolare risulta nulla. Esaminiamone un altro.

$$\boxed{\text{Il punto della retta } (1,2,0,-1)+t(1,1,1,1) \text{ di minima distanza da } (1,0,0,0) \text{ è ?}}$$

$x=(1,0,0,0)$ $\quad u=(1,1,1,1)$ $\quad x_0=(1,2,0,-1)$

$$x-x_0=(0,-2,0,1)$$

$$(x-x_0)_u=\frac{-2+1}{4}(1,1,1,1)=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$$

$$\left|x-x_0-(x-x_0)_u\right|=\left|(0,-2,0,1)-\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{1}{4},-\frac{7}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)\right|=\left|\frac{1}{4}(1,-7,1,5)\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{1+49+1+25}=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{19}}$$

Il punto di minima distanza $\bar{x}$ è $x_0+(x-x_0)_u$ e dunque

$$\bar{x} = (1, 2, 0, -1) + \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(3, 7, -1, -5)$$

è il punto di minima distanza, pari a quella calcolata più su: $\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{19}}$.

Una dimostrazione veloce che $\bar{x} = x_0 + (x - x_0)_u$ sia il punto di minima distanza si può ottenere come nel caso della proiezione, considerando che

$$|x - (x_0 + \alpha u)|^2 =$$

$$= \Big| \underbrace{x - (x_0 + (x - x_0)_u)}_{\perp\, u \text{ per il th. proiezione}} + \underbrace{(\cancel{x_0} + (x - x_0)_u) - (\cancel{x_0} + \alpha u)}_{//\, u} \Big|^2 =$$

$$= |x - (x_0 + (x - x_0)_u|^2 + \underbrace{|(x - x_0)_u - \alpha u|^2}_{\geq 0\ \forall \alpha} \geq$$

$$\geq |x - (x_0 + (x - x_0)_u|^2 \quad \forall \alpha$$

e dunque $x_0 + (x - x_0)u$ è il punto della retta di minima distanza da x.