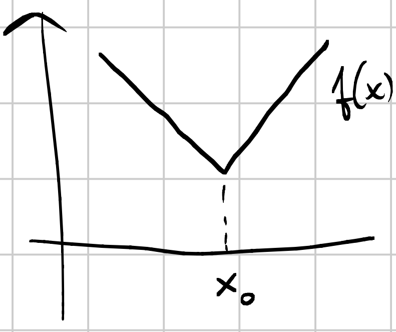
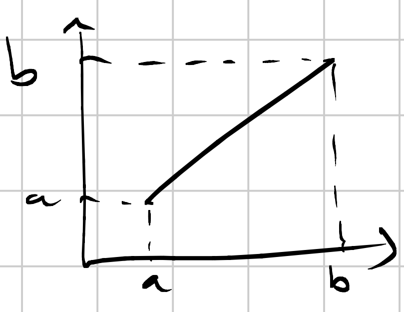
BREVI NOTE PRATICHE SUGLI ESTREMI VINCOLATI

La condizione, forse impiegata per la prima volta da Fermat nel suo lavoro sulla rifrazione della luce nel quale utilizzava l'ipotesi che la luce dovesse scegliere il cammino che le consentisse di impiegare il tempo MINIMO per andare da un punto ad un altro - tenendo conto delle differenti velocità nei vari mezzi (aria, acqua, vetro...) - che riguarda l'annullamento della derivata è, purtroppo, molto abusata: la sua validità è soggetta a varie ipotesi (come tutti i teoremi) ed è FALSA se esse non sono verificate:



x_0 non è uno zero di $f'(x)$ ma è minimo interno a dom f



a e b sono estremi nei quali f' è (ragionevolmente) definita, ma fa 1 e non 0.

Le cose non migliorano affatto in più variabili (... e quando mai!). Un enunciato ragionevole è:

TEOREMA (Fermat): **Se**

- x_0 è INTERNO a dom f
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ esiste (finita)
- x_0 è un estremo (max o min) locale

allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

La direzione v della derivata è arbitraria.

Ricordiamo che x_0 è di minimo locale per f se $\exists B(x_0)$, intorno di x_0, tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \cap B(x_0)$$

e dunque se è un minimo solo se si considerano i punti del dominio della funzione ad esso sufficientemente vicini.

Il problema oggetto di queste note è di fornire un qualche lume su cosa fare quando viene a mancare l'ipotesi che x_0 sia interno al dom f. Esso è, in generale, molto complesso, ma è possibile attaccarlo in qualche modo in alcuni casi particolari.

Per andare al sodo, consideriamo quelli più semplici.

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ una funzione di 2 variabili.
Sia $\Gamma \subseteq \Omega$ un sottoinsieme del dominio di f, che chiameremo il **VINCOLO**, e considereremo il problema di determinare

$$\max_{\Gamma} f \quad e/o \quad \min_{\Gamma} f$$

quando Γ non è aperto (il che renderebbe tutti i punti interni), non è neanche del tutto arbitrario, ma è invece:

1) il grafico di una funzione φ, e cioè

$$\Gamma = \{(x,y) \in \Omega : y = \varphi(x),\ x \in [a,b]\}$$

ovvero

$$\Gamma = \{(x,y) \in \Omega : x = \varphi(y),\ y \in [a,b]\}$$

oppure

2) il sostegno di una curva parametrica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$

$$\Gamma = \{(x,y) \in \Omega : x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad t \in [a,b]\}$$

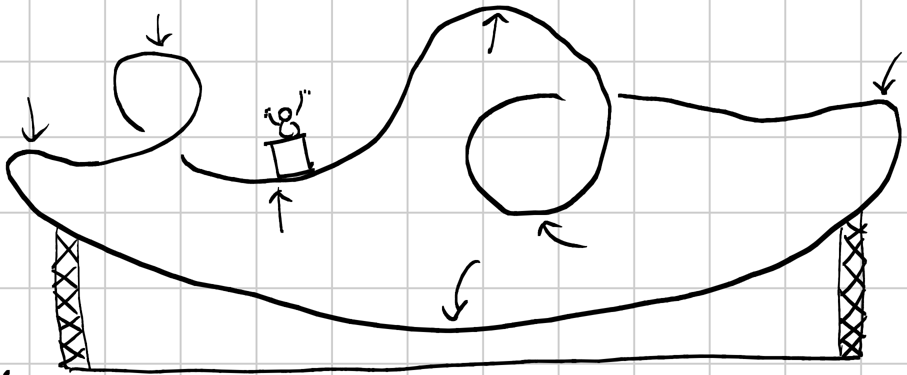
o ancora

3) il luogo degli zeri di una funzione di due variabili g, e cioè

$$\Gamma = \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 0\}$$

Per maggiore brevità chiameremo il caso 1) <u>vincolo cartesiano</u> il caso 2) <u>vincolo parametrico</u> e il caso 3) <u>vincolo implicito</u>.
Non è una terminologia standard, ma riecheggia quella dell'equazione della retta e può aiutare a ricordare.

Prima di procedere accenniamo che il celebre metodo dei **MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE** riguarda il caso dei vincoli impliciti, e fu scoperto avendo in mente il problema meccanico del moto di una massa su una curva. In sostanza, un ottovolante!



In nessun punto il gradiente del potenziale (e cioè la forza di gravità) è nullo, ma nei punti segnati esso è perpendicolare al binario, che assorbe del tutto la spinta deformandosi poco (si spera!) e dunque se si pone il carrello (fermo) in uno di essi, resta fermo: ecco i punti di equilibrio!
Il problema statico è facile: il potenziale è proporzionale alla altezza rispetto al livello di riferimento (nel quale si definisce nullo) e dunque i punti di equilibrio (non necessariamente stabile) del carrello sull'ottovolante sono

$$\min_{\text{ottovolante}} \text{altezza} \quad e \quad \max_{\text{ottovolante}} \text{altezza}$$

e ciò conduce al problema di determinare massimi e minimi di funzioni su curve. Un'osservazione al volo: un grafico di funzione non può essere un sottinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ perché su ogni retta verticale (od orizzontale, nell'altro caso) ci può essere solo un punto del grafico: un intorno circolare non è fatto così!

Siamo dunque costretti a prendere in considerazione i casi ai quali prima abbiamo accennato e vedere se se ne può ricavare qualcosa di buono: il teorema di Fermat "nativo" non funziona!

VINCOLO CARTESIANO

Supponiamo prima che $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega \,;\, x \in [a,b]\ y = \varphi(x)\}$, e che $(x_0, \varphi(x_0))$ sia un punto di estremo (per esempio: minimo) globale.

Se consideriamo allora $\boxed{h(x) = f(x, \varphi(x))}$, essa assume, al variare di x in $[a,b]$, tutti i valori che f assume su Γ perché, al variare di x in $[a,b]$, il punto $(x, \varphi(x))$ descrive tutto il grafico di φ, Γ.

Gli estremi globali di f su Γ si potranno ottenere ricercando con le tecniche standard per le funzioni di una variabile, gli estremi globali di h su $[a,b]$.
Se f è di classe $C^1(\Omega)$ e $\varphi \in C^1[a,b]$, per il teorema della derivabilità e della continuità delle funzioni composte, segue che $h \in C^1[a,b]$ e dunque, a parte i casi $x=a$ ed $x=b$, i suoi estremi assoluti si troveranno in punti dove $h'=0$.

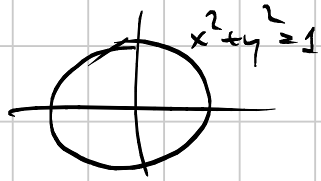
Pressoché identico è il caso del

VINCOLO PARAMETRICO

Basta porre $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) \quad t \in [a,b]$

per ricondursi esattamente allo stesso ordine d'idee

Un esempio parlerà più chiaro!

$$\boxed{f(x,y) = xy} \qquad \Gamma =$$ 

La circonferenza unitaria si presta ad essere studiata, con vari ordini d'impicci, con entrambi i "metodi" precedenti

CARTESIANO

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \underline{\underline{e}} \quad y=-\sqrt{1-x^2} \quad x\in[-1,1]$$

In tal caso gli estremi vincolati (da confrontare fra di loro per determinare i "vincitori") si potranno determinare studiando

$$\min_{\substack{\max \\ x\in[-1,1]}} x\cdot\overbrace{\sqrt{1-x^2}}^{=y} \qquad e \qquad \min_{\substack{\max \\ [-1,1]}} x\Big(\overbrace{-\sqrt{1-x^2}}^{=y}\Big)$$

Le due funzioni di una variabile così ottenute sono l'una opposta all'altra (per puro caso!) e dunque basta studiarne una sola (i massimi dell'una sono minimi dell'altra!): un effetto miracoloso della simmetria di vincolo e funzione.

PARAMETRICO La circonferenza (intera) è sostegno della curva $\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$ $t\in[0,2\pi]$

da cui

$$h(t) = \overset{x}{\cos t}\,\overset{y}{\sin t} = \frac{1}{2}\sin 2t$$

Occorre studiare $\max_{[0,2\pi]}\min \frac{1}{2}\sin 2t$

ed i massimi e minimi globali si determinano "ad occhio"

MAX $2t = \frac{\pi}{2}$ o $2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ o $t = \frac{5}{4}\pi$

MIN $2t = \frac{3}{2}\pi$ o $2t = \frac{3}{2}\pi + 2\pi \Rightarrow t = \frac{3}{4}\pi$ o $t = \frac{7}{4}\pi$

Ad evitare errori grossolani, f <u>NON</u> è l'area del rettangolo avente sulla diagonale l'origine e (x,y): lo è solo se $xy > 0$, e cioè nel I e nel <u>III</u> quadrante! negli altri due quadranti è l'<u>opposto</u> dell'area.

Esiste una "terza via" per affrontare questo problema: quella di Lagrange (che, ad onta del nome, era torinese!)
Prima di esaminare in cosa consista, chiariamo bene cosa cambi se si passa da estremi globali ad estremi locali: nulla!

$\boxed{\text{CARTESIANO}}$ Se $(x_0, \varphi(x_0))$ è un minimo locale di f ristretta a graph(φ) ci sarà un intorno B_δ di $(x_0, \varphi(x_0))$ tale che

$$f(x_0, \varphi(x_0)) \le f(x, \varphi(x)) \quad \text{se } (x, \varphi(x)) \in B_\delta$$

Ora $(x,\varphi(x)) \in B_\delta$ se $\left| (x, \varphi(x)) - (x_0, \varphi(x_0)) \right| < \delta$

e cioè se

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(\varphi(x)-\varphi(x_0))^2}<\delta$$

fissato ora $\varepsilon=\frac{\delta}{2}$, dalla continuità di φ ne segue che $\exists\eta$:

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon=\frac{\delta}{2}$$

se $|x-x_0|<\eta$ e dunque, posto

$$\sigma=\min\left\{\frac{\delta}{2},\eta\right\}$$

ne segue che

$$|(x,\varphi(x))-(x_0,\varphi(x_0))|<\delta$$

se $|x-x_0|<\sigma$. Dunque x_0 è di minimo locale per h.

Dunque, gli estremi locali di $x\to h(x,\varphi(x))$ sono candidati ad essere estremi locali per f su Γ.

Un po' più delicato è il caso

$\boxed{\text{PARAMETRICO}}$

Infatti una curva parametrica non è necessariamente semplice, e dunque può passare per lo stesso punto in diversi istanti.

Purnondimeno, con ragionamento identico a quello precedente si vede subito che ad un estremo locale (x_0, y_0) di f su Γ, $x_0 = \varphi(t_0)$ $y_0 = \psi(t_0)$, corrisponde un estremo locale t_0 per $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$. Di tali t_0 ce ne possono essere diversi, se la curva non è semplice e si sceglie per (x_0, y_0) una delle autointersezioni.

Ai fini "pratici" non cambia nulla, come si diceva:

- gli estremi di f su vincoli di tipo grafico cartesiano di φ, φ derivabile dappertutto, sono fra gli estremi "liberi" di

$$h(x) = f(x, \varphi(x))$$

o, se il grafico è rispetto all'asse y,

$$h(y) = f(\varphi(y), y)$$

- gli estremi di f su vincoli di tipo sostegno della curva parametrica $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ sono fra gli estremi "liberi" (vedi appendice) di

$$h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

VINCOLO IMPLICITO

Alla base di tutto c'è il teorema di U. Dini sulle funzioni implicite. L'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 0\}$, sotto opportune ipotesi, è un grafico cartesiano di una opportuna funzione φ, definita nell'intorno di qualche punto di Π. Il problema è costituito dalle ipotesi che, come è noto, consistono sostanzialmente nell'assumere $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$. Dunque non tutti i luoghi di zeri di funzioni (anche C^∞ o polinomi) sono "adatti" ad essere studiati col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ma solo quelli che verificano la precedente condizione sul gradiente.

Il metodo di Lagrange è espresso nel seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

TEOREMA (Lagrange): Siano $f, g \in C^1(\Omega)$. Sia $(x_0,y_0) \in \Omega$ tale che:

- $g(x_0,y_0) = 0$ (il punto sta sul vincolo)
- (x_0,y_0) è di estremo locale per f su $\Pi = \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 0\}$
- $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$

Allora, definita $h(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ esiste λ_0, il "moltiplicatore di Lagrange" (la "reazione vincolare" in Meccanica) tale che (x_0,y_0,λ_0) verifica $\nabla H(x_0,y_0,\lambda_0) = 0$

e cioè

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial H}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \lambda_0 \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \\ 0 = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - \lambda_0 \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 0 = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}(x_0,y_0,\lambda_0) = g(x_0,y_0) \end{cases}$$

Supponendo di trovare tutte le soluzioni di questo sistema (in generale, è una pura illusione!), l'ultima equazione assicura che le prime due componenti (x_0, y_0) rappresentano un punto del vincolo, mentre le altre esprimono il fatto che $\nabla f(x_0,y_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0)$ sono paralleli. Ricordando che, se non nullo, $\nabla g(x_0,y_0)$ è perpendicolare alla curva di livello passante per (x_0,y_0), ciò garantisce che la forza (il gradiente del potenziale f) è perpendicolare al vincolo e dunque non può accelerare una massa che possa muoversi solo in quella direzione, perché la sua proiezione lungo il vincolo è nulla. Tornando all'esempio:

IMPLICITO

$$f(x,y) = xy$$

$$g(x,y) = x^2+y^2-1$$

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \quad \frac{\text{mai nullo su}}{x^2+y^2=1}, \text{ perché}$$

$$\nabla g(x,y)=0 \Rightarrow 2x=0,\ 2y=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0) \Rightarrow g(x,y)=-1\neq 0$$

Dunque gli estremi vincolati vanno ricercati fra le soluzioni di

$$\boxed{f_x+\lambda g_x=0\ ;\quad f_y+\lambda g_y=0\ ;\quad g=0}$$

e cioè

$$\begin{cases} y+2\lambda x=0 \\ x+2\lambda y=0 \Rightarrow x=-2\lambda y \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$y-4\lambda^2 y=0 \Rightarrow y(1-4\lambda^2)=0$$

$$y=0 \text{ oppure } 1-4\lambda^2=0$$

Dalla seconda equazione $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow x^2+y^2\neq 1$
e dunque non ci sono soluzioni del sistema verificanti $y=0$.
Invece, se $1=4\lambda^2 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$ da cui:
Se $\lambda=\frac{1}{2}$, la prima equazione diventa $x=-y$, e sostituendo
nella terza si ha $2x^2=1$ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, il che fornisce le
due soluzioni $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Se invece, è $\lambda=-\frac{1}{2}$, la prima equazione diventa $x=y$
da cui, come più su, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ da cui infine

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

I quattro punti verificanti la condizione d'estremo locale sono

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ sui quali } f = \frac{1}{2}$$

e

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ sui quali } f = -\frac{1}{2}.$$

I primi due sono massimi e gli altri minimi di f sul vincolo.

I MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Perché al plurale, mentre λ è uno solo?
Accenniamo al teorema nel caso generale

TEOREMA (Lagrange): Sia $f(x_1 \dots x_n)$ una funzione di classe $C^1(\Omega)$, Ω aperto in $\mathbb{R}^n$, e siano $g_1, g_2, \dots g_k \in C^1(\Omega)$ tali che la matrice jacobiana $\dfrac{\partial(g_1 \dots g_k)}{\partial(x_1 \dots x_n)}$ abbia rango k in ogni punto.

Allora, dato un estremo $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ di f su Π

$$\Pi = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \; ; \; \begin{cases} g_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ g_2(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE) tali che

$$\begin{cases} 0 = \nabla f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x_1^0 \dots x_n^0) \\ 0 = g_i(x_1^0, \dots, x_n^0) \quad \forall i = 1 \dots k \end{cases}$$

Ogni superficie $g_i(x) = 0$ ha il suo moltiplicatore λ_i.

Anche qui, le ultime k equazioni esprimono l'appartenenza al vincolo, mentre le n che contengono ∇f impongono che esso appartenga al complemento ortogonale dello spazio di tutti gli spostamenti sul vincolo.
Una volta di più, la forza ∇f è bilanciata completamente dai vincoli e non ha componenti lungo di essi.

NOTA CONCLUSIVA

Non esiste modo di decidere, a priori, quale sia il metodo più conveniente. Ciascuno può esserlo, a seconda dei casi.
Le difficoltà sono non dissimili da quelle presentate dalla condizione di Fermat

$$\nabla f = 0 \qquad (n \text{ equazioni}, n \text{ incognite})$$

che è comunque un sistema (in generale) solo di poco "meno" non lineare di

$$g = 0 \, ; \quad \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad (n+k \text{ equazioni}, n+k \text{ incognite})$$

La risoluzione esplicita è, in generale, proibitiva, come lo è persino nel caso più semplice (1 variabile): $f'(x) = 0$.

Comunque, i tre metodi hanno il loro spazio e le loro opportunità di applicazione, oltre al loro valore teorico straordinario.

Un'altra nota: così come la condizione di Fermat originale $f'(x_0) = 0$, i "metodi" elencati forniscono condizioni necessarie, in generale non sufficienti, il che vuol dire che la ricerca degli estremi comporterà indagini ulteriori come accade in una variabile per distinguere gli estremi dai flessi, o in più variabili per discriminare fra estremi, selle e punti critici di ordine superiore. Davvero non banale!

APPENDICE: ESTREMI "LIBERI" E "VINCOLATI"

Riconsideriamo brevemente i vincoli cartesiani e parametrici, in casi più generali, attraverso qualche esempio.

La rappresentazione cartesiana e parametrica del vincolo si basa sulla sostituzione di f con un'opportuna funzione composta di parametri opportuni, per la quale non occorre considerare vincoli, perché sono già "inglobati" per così dire, nella definizione della funzione stessa.

Se volessi studiare gli estremi di $f(x,y,z) = x^2 y z^3$ sulla sfera unitaria $|(x,y,z)| = 1$ e decidessi di adoperare la sua rappresentazione parametrica standard

$$x = \cos\theta \sin\varphi \qquad y = \sin\theta \sin\varphi \qquad z = \cos\varphi$$

$$\varphi \in [0,\pi], \; \theta \in [0, 2\pi]$$

posso ricavare gli estremi richiesti considerando

$$h(\varphi, \theta) = (\underbrace{\cos\theta \sin\varphi}_{x})^2 (\underbrace{\sin\theta \sin\varphi}_{y}) (\underbrace{\cos\varphi}_{z})^3$$

Al variare di φ in $[0,\pi]$ e θ in $[0,2\pi]$, il punto

$$\boxed{H}(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

percorre tutti e soli i punti del vincolo e dunque, se c'è un estremo per f sul vincolo, deve essere lo stesso tipo di estremo per H in tutti i punti (θ,φ) del dominio di $\boxed{H}$ che hanno per immagine l'estremo considerato, per effetto della continuità di $\boxed{H}$, che si presuppone.

Il problema è diventato "libero", non "vincolato",

$$\begin{array}{c}\max\\ \min\\ \varphi\in[0,\pi]\\ \theta\in[0,2\pi]\end{array} \underbrace{f(\boxed{H}(\theta,\varphi))}_{H(\theta,\varphi)}$$

In modo del tutto simile si ragiona nel caso cartesiano.

La complessità del procedimento è fortemente influenzata dalla complessità della rappresentazione, cartesiana o parametrica, del vincolo. Le coordinate polari sferiche non sono sempre incoraggianti!

In questo caso, molto semplice all'aspetto, ci si può ricordare che l'equazione implicita della sfera unitaria è semplice

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1=0$$

il che induce a tentare la via dei moltiplicatori... anzi: del moltiplicatore (ogni equazione introduce un moltiplicatore)

$$\begin{cases} 0 = f_x + \lambda g_x = 2xyz^3 + 2\lambda x \\ 0 = f_y + \lambda g_y = x^2z^3 + 2\lambda y \\ 0 = f_z + \lambda g_z = 3x^2yz^2 + 2\lambda z \\ 0 = g = x^2+y^2+z^2-1 \end{cases}$$

4 equazioni nelle 4 incognite x, y, z, λ

PIUTTOSTO NON LINEARE!

Non è semplice per nulla, ma è profondamente diverso dallo studiare $\boxed{H}(\theta,\varphi)$ su $[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{4}]$: ci sono casi molto fortunati nei quali un problema è abbordabile e l'altro no.

Un'ultima domanda, giusto per ripensare un po' d'algebra:

"DI CHE GRADO È IL SISTEMA PRECEDENTE"?

Può essere utile calcolarlo perché ha a che fare col numero delle soluzioni del sistema (teorema di BÉZOUT).

La risoluzione dei sistemi non lineari per via numerica è stato ed è ancora oggetto di studio: il riferimento di obbligo è costituito dai libri di Analisi Numerica.
Per una raccolta di programmi "pratici", corredati di presentazione e commenti sensati, si può consultare il solito
Press-Teukolsky-Vetterling-Flannery
"Numerical Recipes in C"
nelle varie versioni (si può sostituire a C C++ oppure FORTRAN), a seconda del linguaggio preferito.