DIAGONALIZZABILITA'

Nelle note che seguono viene presentato il concetto di diagonalizzabilità di un operatore (e cioè di un endomorfismo su X, ovvero un'applicazione lineare $A: X \to X$) su uno spazio di dimensione finita X. I risultati presentati non sono legati ad una particolare scelta del campo degli scalari, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, ma è bene anticipare che tutta la teoria spettrale è strettamente legata a $\mathbb{C}$, ed in particolare alla sua proprietà di contenere soluzioni per l'equazione $p(t)=0$, per ogni polinomio non costante p, a coefficienti (in $\mathbb{R}$ o) in $\mathbb{C}$: è la proprietà di essere <u>algebricamente chiuso</u>. L'ipotesi sulla dimensione finita è necessaria: gran parte dei risultati ammette estensioni a spazi privi di basi, sviluppata nella prima metà del XX secolo, ma esse fanno uso di tecniche differenti che coinvolgono inevitabilmente la CONTINUITA': una serie NON è una somma, è un limite di somme!

Iniziamo con due definizioni fondamentali

DEFINIZIONE 1.- Data $A: X \to X$ lineare, con dim X finita e non nulla, e fissata una base $u_1 \dots u_n$ di X, A si dirà DIAGONALE rispetto alla base $u_1 \dots u_n$ se la sua matrice associata a quella base, tanto nel dominio quanto nel codominio, è diagonale, e cioè se

$$x = \sum_1^n x_i u_i \Rightarrow A(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} x_i u_j$$

ove $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

DEFINIZIONE 2. — Se $A : X \to X$ è lineare, con $\dim X$ finita e non nulla, A si dice **DIAGONALIZZABILE** se esiste una base rispetto alla quale A sia diagonale.

Esempio: l'applicazione associata ad una matrice diagonale è (ovviamente) diagonale rispetto alla base canonica, perché la matrice associata all'applicazione lineare e alla base canonica coincide con la matrice che definisce (in forma di prodotto Ax) la applicazione lineare.

Esempio: sia $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$. La matrice associata alla base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, che non è diagonale.
Se però si sceglie $u_1 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ si ottiene

$$A(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}+1 \\ 1-\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\, u_1$$

e

$$A(u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\, u_2$$

da cui la matrice associata ad A ed alla base (u_1, u_2) è

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

colonna delle coordinate di $-\sqrt{2}\, u_1$ rispetto a (u_1, u_2)

colonna delle coordinate di $\sqrt{2}\, u_2$ rispetto a (u_1, u_2)

che è diagonale. Dunque A è diagonalizzabile.

Il prossimo risultato, oggetto principale di queste note, stabilisce un legame fra la diagonalizzabilità e la risolubilità dell'equazione $A(u)=\lambda u$, che è stata protagonista dell'ultimo esempio. Iniziamo con alcune definizioni.

DEFINIZIONE 3. – Data $A : X \to X$, $\dim X$ finita e non nulla, si dirà **AUTOVALORE** (o **VALORE PROPRIO**) di A ogni scalare λ per il quale esistono $u \in X$ verificanti

$$u \neq 0, \qquad A(u) = \lambda u$$

Ogni soluzione $u \neq 0$ di $A(u)=\lambda u$ si dirà **AUTOVETTORE** (o **VETTORE PROPRIO**) di A, relativo a λ.

L'insieme di 0 e di tutti gli autovettori relativi ad un fissato autovalore λ verrà detto **AUTOSPAZIO** relativo a λ.

L'insieme degli autovalori di A si dirà **SPETTRO** di A e si denoterà con $\sigma(A)$.

Possiamo ora dimostrare il risultato principale.

TEOREMA 4. – Sia $A : X \to X$ lineare, $\dim X$ finita e non nulla. Allora condizione necessaria e sufficiente perché A sia diagonalizzabile è che esista una base di X formata da autovettori di A, detta anche **BASE SPETTRALE**.

C.N. A diagonalizzabile $\Rightarrow$ Esiste una base spettrale

Dim. Poiché A è diagonalizzabile esiste una base $u_1 \ldots u_n$ tale che la matrice associata ad A ed $u_1 \ldots u_n$ è diagonale, e cioè

$$x = \sum_1^n x_i u_i \Rightarrow A(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} x_i u_j \quad \text{ove}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j$$

Proveremo ora che i vettori u_i, tutti non nulli in quanto elementi di una base e quindi indipendenti, verificano anche l'equazione $A(u) = \lambda u$. Infatti

$$A(u_h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} (u_h)_i u_j$$

Per calcolare la coordinata i-esima di u_h rispetto ad $u_1 \ldots u_n$ basta osservare che

$$u_h = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 1 \cdot u_h + \cdots + 0u_n$$

e dunque le sue coordinate sono tutte nulle, salvo quella h-esima che vale 1. Ne segue che

$$A(u_h) = \sum_{i,j=1} a_{ji} (u_h)_i u_j =$$

(poiché $(u_h)_i = 1$ solo se $i = h$)

$$= \sum_{j=1}^n a_{jh} \cdot 1 \cdot u_j =$$

(poiché a_{jh} è diagonale)

$$= a_{hh} u_h$$

da cui segue che u_h è un autovettore di A relativo allo autovalore a_{hh}. Poiché ogni u_h è un autovettore, allora $u_1 \dots u_n$ è la base spettrale richiesta.

C.S.

Esiste una base spettrale $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

Dim. Sia $u_1 \dots u_n$ una base di X costituita da autovettori di A.
Proveremo che la matrice associata ad A ed alla base $u_1 \dots u_n$ è diagonale. Infatti essa verifica

$$x = \sum_1^n x_i u_i \Rightarrow A(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_j u_i$$

Poiché u_h è un autovettore, esistono λ_h tali che $A(u_h) = \lambda_h u_h$.
Inoltre la colonna h-esima della matrice associata a_{ih} è formata dalle coordinate di $A(u_h) = \lambda_h u_h$ rispetto alla base "d'arrivo" $u_1 \dots u_n$ che, come visto prima, valgono 0 per $i \neq h$ e λ_h per $i = h$. Ne segue che la matrice associata è diagonale, con gli elementi diagonali coincidenti con gli autovalori λ_h.

$\blacksquare$

Qualche nota finale.

1) L'autospazio relativo ad un fissato autovalore è un sottospazio di X. Infatti l'autospazio è formato da tutte le soluzioni (nulle e non nulle) dell'equazione $A(u) = \lambda u$ e cioè $(A - \lambda I) u = 0$. Ne segue che l'autospazio è il $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ ed è dunque un sottospazio.

2) L'esistenza di autovalori, e conseguentemente di autovettori è strettamente collegato al campo degli scalari scelto. Infatti, sia

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \qquad A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

L'equazione degli autovettori

$$\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

è equivalente al sistema

$$y = \lambda x \qquad -x = \lambda y \qquad (*)$$

e dunque

$$y = -\lambda^2 y \iff y(1+\lambda^2) = 0$$

Se il campo degli scalari è $\mathbb{R}$ ne segue che $(1+\lambda^2) > 0$ e dunque dall'ultima equazione segue $y = 0$, e sostituendo nella seconda delle $(*)$ segue $x = 0$, e dunque non ci sono soluzioni non nulle di $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Se invece gli scalari sono complessi, allora per $\lambda = \pm i$ $(1+\lambda^2) = 0 \Rightarrow y$ può essere scelto ad arbitrio e

per $\lambda = i$ $\quad \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sono le soluzioni di $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

mentre per $\lambda = -i$ l'autospazio è $\begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, e dunque c'è la base di autovettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e dunque

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$$ <u>è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$</u>, <u>ma non su $\mathbb{R}$</u>.

3) <u>L'autospazio relativo a 0</u> è il nucleo di $A-0I=A$. Dunque 0 è autovalore se e solo se $\operatorname{Ker} A\neq\{0\}$ e gli autovettori di A relativi a 0 sono gli elementi non nulli del $\operatorname{Ker} A$.

4) <u>Esistono operatori privi di basi spettrali</u>, e quindi non diagonalizzabili, indipendentemente dal campo degli scalari scelto. Ad esempio, si consideri

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}$$

Il sistema degli autovettori di A è

$$\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}$$

è equivalente a $\lambda x=y$; $\lambda y=0$, che ha soluzioni

$\lambda=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x$ arbitrario

$\lambda\neq 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$

e le uniche soluzioni non nulle si hanno per $\lambda=0$, unico autovalore, con autovettori $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$. Ne segue subito che lo spazio di tutti gli autovettori ha dimensione 1, mentre $X=\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2, e dunque nessun sistema di autovettori può generare $\mathbb{R}^2$.

5) I concetti della teoria spettrale possono essere estesi agli spazi di dimensione infinita, con alcune precauzioni. Svolgere la teoria esula dall'ambito di un corso elementare (l'Analisi Funzionale è la disciplina che, tradizionalmente, ospita tali sviluppi). Ci limitiamo a qualche esempio.

$$X = C^{\infty}(\mathbb{R}), \quad A(u) = u', \quad A : X \to X.$$

Per determinare lo spettro di A occorre risolvere l'equazione

$$A(u) = \lambda u \iff u' = \lambda u$$

L'equazione trovata è un'equazione differenziale del primo ordine (solo derivate prime) a coefficienti costanti, le soluzioni della quale sono tutte le $u(t) = c e^{\lambda t}$, che per $c \neq 0$ sono non nulle. Dunque ogni λ, reale o complesso, è autovalore, e $\langle e^{\lambda t} \rangle$ è il relativo autospazio.

Come ulteriore esempio consideriamo $A(u) = u''$. Prima di scegliere lo spazio X studiamo il sistema degli autovalori

$$u'' = A(u) = \lambda u$$

L'equazione $u'' - \lambda u = 0$ ha soluzioni $\langle e^{\sqrt{\lambda} t}, e^{-\sqrt{\lambda} t} \rangle$, se $\lambda > 0$, $\langle 1, t \rangle$ se $\lambda = 0$, mentre se $\lambda < 0$ merita uno studio più attento.
Il metodo precedente conduce alle soluzioni $e^{\alpha t}$ ove α verifica l'equazione caratteristica $\alpha^2 + \lambda = 0$, il che conduce alla base di soluzioni $\langle e^{i\sqrt{|\lambda|} t}, e^{-i\sqrt{|\lambda|} t} \rangle$.
Apparentemente non ci sono soluzioni reali, ma non è così. Infatti, per il principio di sovrapposizione, le due combinazioni

$$\cos\sqrt{|\lambda|}\,t = \frac{e^{i\sqrt{|\lambda|}\,t} + e^{-i\sqrt{|\lambda|}\,t}}{2}$$

e

$$\sin\sqrt{|\lambda|}\,t = \frac{e^{i\sqrt{|\lambda|}\,t} - e^{-\sqrt{|\lambda|}\,t}}{2i}$$

sono soluzioni reali, non identicamente nulle, della equazione $u'' - \lambda u = 0$ con $\lambda < 0$.

Ne segue che ogni λ reale è autovalore. La teoria delle equazioni differenziali lineari assicura poi che

$$\langle e^{\sqrt{\lambda}\,t}, e^{-\sqrt{\lambda}\,t} \rangle \qquad \lambda > 0$$

$$\langle 1, t \rangle \qquad \lambda = 0$$

$$\langle \cos\sqrt{\lambda}\,t, \sin\sqrt{\lambda}\,t \rangle \qquad \lambda < 0$$

sono <u>tutte</u> le soluzioni dell'equazione $A(u) = \lambda u$, perché garantisce che lo spazio delle soluzioni ha dimensione finita pari all'ordine dell'equazione.

Il concetto di diagonalizzabilità non può essere espresso usando la matrice associata, che è ineludibilmente collegata al concetto di base. Inoltre, a causa della necessità di utilizzare la continuità, si è costretti a non limitare lo spettro solamente all'insieme degli scalari per i quali $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, ma è necessario includervi altri insiemi. I dettagli sono reperibili sui libri di Analisi Funzionale, fra i quali il classico Riesz-Nagy e il più recente K. YOSIDA.