LE GENERALITA' SULLE CURVE PARAMETRICHE (14-5-2020)

Le brevi note che seguono intendono presentare le idee e la terminologia legata al concetto di curva parametrica.
E' bene convincersi subito che una curva parametrica ha affinità profonde col concetto intuitivo di curva, ma se ne differenzia profondamente. Un concetto molto più vicino ad esse è quello di moto, o di legge oraria di un moto, come si incontra in cinematica.

DEFINIZIONE: <u>Una CURVA PARAMETRICA in $\mathbb{R}^n$ è una funzione definita su un intervallo arbitrario di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^n$.</u>

DEFINIZIONE: <u>Una curva parametrica</u> $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ <u>viene detta CHIUSA se</u>

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

DEFINIZIONE: <u>Una curva parametrica $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è detta SEMPLICE se è iniettiva su $]a,b[$.</u>

Poiché l'iniettività è richiesta solo nei punti <u>interni</u> ad $[a,b]$, una curva può essere semplice e chiusa. Ad esempio, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ è chiusa, perché $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1,0)$, ed è semplice perché, in $]0, 2\pi[$, $\gamma(t) = \gamma(t')$ se e solo se $t = t'$.

NOTA: Se si pensa a t come al tempo e a $\gamma(t)$ come alla posizione di un punto mobile all'istante t, si riconosce immediatamente che il concetto di curva parametrica corrisponde esattamente a quello di "legge oraria" di un moto, in Meccanica. Si nota anche che, se uno ha in mente che una curva sia un sottinsieme (opportuno) di $\mathbb{R}^n$, una curva parametrica NON lo è. In effetti, la cosa

più simile al concetto intuitivo di curva non è tanto quello di curva parametrica ma, piuttosto, quello della sua IMMAGINE, nel senso della teoria delle funzioni.
Ad esempio:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

hanno lo stesso dominio, la stessa immagine (la circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$) = ma sono curve parametriche DIVERSE, in quanto la seconda percorre la circonferenza DUE VOLTE nel tempo in cui la prima la descrive UNA VOLTA (il punto materiale si muove a velocità doppia!). Vale dunque la pena di introdurre la seguente

<u>DEFINIZIONE</u>: <u>Si definisce SOSTEGNO di una curva parametrica</u> $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ <u>la sua</u>

<u>immagine</u>

$$\gamma[a,b] = \{ u \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a,b] \ \ \gamma(t) = u \}$$

La teoria delle funzioni continue o derivabili fra spazi euclidei consente di porre agevolmente le corrispondenti definizioni per le curve.

<u>DEFINIZIONE</u> : <u>Una curva</u> $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ <u>sarà detta CONTINUA</u> (o <u>DERIVABILE</u>, o C^1, o C^∞ ..) <u>se tali sono tutte le sue componenti scalari</u> $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$, <u>ove</u>

$$\gamma(t) \equiv (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

<u>ATTENZIONE</u> : è uso corrente di usare l'espressione "REGOLARE" a proposito di funzioni per intendere, a seconda del contesto, la continuità della funzione o delle derivate fino a qualche conveniente ordine. Può sembrare utile estendere tale

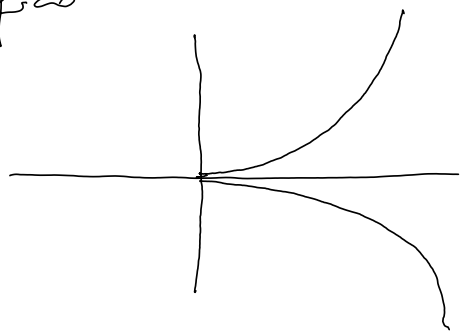
uso alle curve parametriche, ma occorre evitare di cadere nella trappola. La qualifica di "REGOLARE" per curve (e superficie) parametriche ha a che fare con l'esistenza di rette (o piani) tangenti, e ciò non segue immediatamente dalla ipotesi di regolarità delle funzioni componenti.

Si consideri, ad esempio, la curva parametrica $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ $t \in \mathbb{R}$. Le sue componenti sono polinomi, le funzioni scalari più regolari che esistono (costanti a parte...) ma la "retta tangente" costruita nel capitolo sul calcolo differenziale per le funzioni fra spazi euclidei è, in $(0,0) = \gamma(0)$ la "retta" $\varphi(t) = \gamma(0) + t\dot{\gamma}(0)$, e poiché $\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2)$ ne segue $\dot{\gamma}(0) = (0,0)$, da cui la "retta" tangente sarebbe, in forma parametrica $\varphi(t) = (0,0)$ $\forall t$, che non ha proprio l'aria di una retta. In effetti, se si prova a determinare l'equazione

cartesiana della curva "vera" corrispondente eliminando il parametro t nel sistema

$$x = t^2 \qquad y = t^3$$

si ottiene $t = y^{\frac{1}{3}}$ e $x = y^{\frac{2}{3}}$ che ha come grafico



che nell'origine presenta una cuspide. In effetti, le potenze minori di 1 come $\frac{2}{3}$ NON sono derivabili in 0. Come è possibile che una funzione con componenti polinomiali abbia un'immagine così poco rassicurante? Basta riflettere al fatto che $\dot{\gamma}(0) = 0$.
Il punto materiale rallenta (dolcemente) se $y \to 0$, "arriva" fermo in 0 e riparte (dolcemente in direzione opposta lungo l'altro ramo della funzione $y^{2/3}$.
Le soste sono assai rischiose!!!

DEFINIZIONE: Un curva parametrizzata $\gamma : [a,b]$ in $\mathbb{R}^n$ sarà detta REGOLARE se $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. E' uso corrente assumere l'ipotesi $\gamma \in C^1[a,b]$.

Nota: la regolarità della curva non solo implica la derivabilità ma, in virtù della ipotesi $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, possiede in ogni punto del suo sostegno $\gamma(t_0)$ una autentica retta tangente

$$\varphi(t) = \gamma(t_0) + t\,\dot{\gamma}(t_0)$$

DEFINIZIONE: La retta parametrica

$$\varphi(t) = \gamma(t_0) + t\,\dot{\gamma}(t_0)$$

è detta RETTA TANGENTE AL SOSTEGNO della curva parametrizzata REGOLARE γ, nel suo punto $\gamma(t_0)$.

NOTA: Una parte non trascurabile del lavoro necessario a calcolare la retta tangente in un punto del sostegno $\gamma(t_0)$ dato di una curva γ è quello di determinare il valore t_0

del parametro per il quale $\gamma(t_0)$ è il punto dato, che è poi necessario per calcolare $\dot\gamma(t_0)$, la direzione tangente.

ESEMPIO: <u>Calcolare la retta tangente al sostegno di</u> $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ <u>nel punto</u> $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Si risolve il sistema

$$\cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

che fornisce l'unico valore del parametro $t_0 = \pi/4$. La direzione tangente corrispondente è

$$\dot\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-\sin t, \cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

e la retta tangente (in forma parametrica) è

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

o in forma scalare,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} - t\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}} + t\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cambiando la "scala dei tempi", ponendo $t\frac{1}{\sqrt{2}} = s$ si ottiene anche

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} - s \\ 1/\sqrt{2} + s \end{pmatrix}$$

È rassicurante osservare che il "raggio vettore" del punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, è normale alla direzione della tangente $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, come mostra subito il calcolo del prodotto scalare dei due vettori proprio come dice la Geometria Euclidea.

<u>DEFINIZIONE</u>: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ <u>sarà detta GENERALMENTE REGOLARE (ovvero REGOLARE A TRATTI) se esiste una partizione</u> $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ <u>tale che γ sia regolare in ogni intervallo</u> $[t_i, t_{i+1}]$.

NOTA: allo stesso modo si possono definire le curve continue a tratti, derivabili a tratti, C^∞ a tratti ...

ESEMPIO: Si consideri la curva piana (a valori in $\mathbb{R}^2$)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t(t-1) \\ t(t-1)(2t-1) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Di certo, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1) <u>E' regolare</u>? Si ha

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ (2t-1)(2t-1) + t(t-1)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

Perché $\dot{\gamma}$ si annulli occorre che entrambe le sue componenti lo facciano, e dunque deve essere $t = \frac{1}{2}$. Sostituendo nella seconda componente, essa vale

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)2 = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Dunque non esistono valori del parametro nei quali $\dot{\gamma}$ si annulli; di conseguenza, γ è <u>regolare</u>.

2) E' semplice? Si osserva subito che

$$\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0)$$

e dunque γ NON è semplice in $\mathbb{R}$.

3) Per avere un'idea di come sia fatto il sostegno di γ, osserviamo che

a) $x(t) = 0$ se e solo se $t = 0$ o $t = 1$.

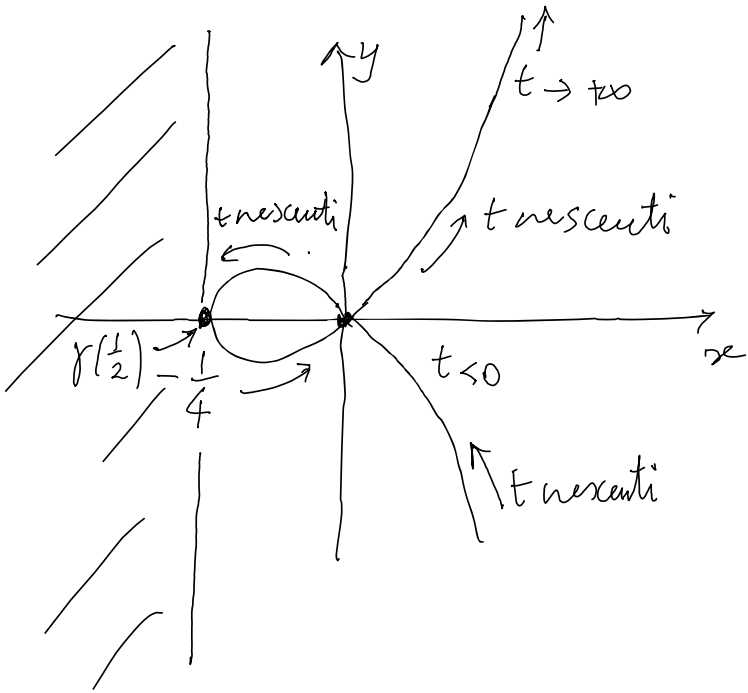
b) $y(t) = 0$ se e solo se $t = 0$, $t = 1$ o $t = \frac{1}{2}$

Dunque il sostegno interseca l'asse $x = 0$ solo nell'origine e l'asse x $(y = 0)$ solo nell'origine e nel punto $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

c) Si osserva che $y = x(2t-1)$, da cui y ed x sono concordi se e solo se $t > \frac{1}{2}$ e discordi altrimenti.

d) La funzione $x(t) = t(t-1) = t^2 - t$ ha minimo assoluto per $t = \frac{1}{2}$, e tale minimo è $x\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, da cui

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{3}{4}$$



Nel punto $(0,0) = \gamma(0) = \gamma(1)$ ci sono due tangenti, una relativa a $t_0 = 0$ e l'altra relativa a $t_0 = 1$, distinte, come risulta immediatamente dal calcolo di $\dot{\gamma}(0)$ e $\dot{\gamma}(1)$.

Nel linguaggio della Geometria un punto come $(0,0)$ si chiama NODO. Ogni

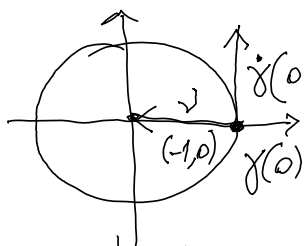
altro approfondimento esula dall'ambito limitato di queste note.

NOTA: per le curve PIANE, aventi cioè sostegno in $\mathbb{R}^2$, si può introdurre il concetto di direzione normale alla curva in un punto del suo sostegno, purché la curva sia regolare in tale punto.

In effetti, se $\dot{\gamma}(t_0) = (a, b)$ è la direzione tangente alla curva, ed almeno uno dei due valori a e b non si annulla, un vettore normale a $\dot{\gamma}(t_0)$ è, semplicemente

$$\nu = (-b, a)$$

anch'esso non nullo. L'orientamento di ν è:



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Se, invece, $\dot{\gamma}(t_0) = (0,0)$ ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è normale a $(0,0)$, e non ha senso geometrico!