PROVA DEL TEOREMA FONDAMENTALE.

In questa sezione verrà stabilita, in due forme equivalenti, la più importante condizione sufficiente per l'integrabilità di un campo (o della forma associata), di uso pratico assai malagevole, ma importantissima come strumento per provare la validità di quelle di uso più comodo.

Sarà in seguito necessario un risultato ausiliario, che generalizza all'integrale dei campi la proprietà additiva dello integrale ordinario.

DEFINIZIONE: Date due curve $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2 \, [b,c] \to \Omega$ si definisce la congiunzione $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ delle due curve come quella definita ponendo

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 (t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [b,c] \end{cases}$$

Risulta anche $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a,c] \longrightarrow \Omega$

Si definisca inoltre curva opposta a $\gamma:[a,b]\to\Omega$ la curva $\ominus\gamma:[a,b]\to\Omega$ definita ponendo

$$\ominus\gamma(t) = \gamma(b-t+a)$$

Osserviamo che la congiunzione fra due curve è la curva parametrica che prima percorre il sostegno di γ_1 e poi, in seguente, quello di γ_2. La curva opposta, invece, poiché quando t cresce da a a b $(b-t+a)$ decresce da b ad a, percorre lo stesso sostegno di γ, ma in verso opposto, dal punto finale a quello iniziale.

Le curve così introdotte godono di proprietà notevoli, rispetto all'integrazione.

LEMMA Siano $\gamma_1:[a,b]\to\Omega$ e $\gamma_2:[b,c]\to\Omega$. Allora, per ogni campo $A:\Omega\to\mathbb{R}^n$, di classe C^0, risulta

$$\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} A = \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A \quad \text{e} \quad \int_{\ominus\gamma_1} A = -\int_{\gamma_1} A$$

DIM. Da $(\gamma_1\oplus\gamma_2) = \begin{cases}\gamma_1 & \text{su } [a,b]\\ \gamma_2 & \text{su } [b,c]\end{cases}$

segue che

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} A = \int_a^c A\big(\gamma_1 \oplus \gamma_2 (t)\big)\,(\gamma_1 \oplus \gamma_2)^{\cdot}(t)\, dt =$$

(per la proprietà additiva dell'integrale ordinario)

$$= \int_a^b A(\gamma_1(t))\,\dot{\gamma}_1(t)\, dt + \int_b^c A(\gamma_2(t))\,\dot{\gamma}_2(t)\, dt =$$

$$= \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A$$

Notiamo che tale ragionamento è valido anche se non esiste $\dot{\gamma}(b)$, ma solo $\dot{\gamma}_-(b)$ e $\dot{\gamma}_+(b)$.
Le curve per cui ciò accade solo per un numero finito di punti si dicono C^1 a tratti.
Inoltre

$$\int_{\ominus\gamma_1(t)} A = \int_a^b A(\ominus\gamma_1(t))(\ominus\dot{\gamma}_1)(t)\, dt =$$

$$\left(\text{poiché } \ominus\gamma_1(t) = \gamma_1(b+a-t) \text{ e } (\ominus\dot{\gamma}_1)(t) = -\dot{\gamma}_1(b+a-t)\right)$$

$$= \int_a^b A(\gamma_1(b+a-t))\left[-\dot{\gamma}_1(b+a-t)\right] dt =$$

(con il cambio di variabile $b+a-t=s$)

$$= \int_b^a A(\gamma_1(s))\,\dot{\gamma}_1(s)\, ds = -\int_a^b A(\gamma_1(s))\,\dot{\gamma}_1(s)\, ds$$

$\blacksquare$

Siamo ora in grado di ripercorrere, passo passo, la dimostrazione del teorema di Torricelli e costruire una primitiva per ogni campo continuo il cui integrale non dipende dal cammino, ma solo dagli estremi.

DIMOSTRAZIONE DELLA CONDIZIONE SUFFICIENTE DEL TEOREMA FONDAMENTALE.

Fissiamo $x_0 \in \Omega$ e denotiamo con $\gamma_{x_0 x}$ una qualunque curva avente per primo estremo x_0 e per secondo x. Per l'ipotesi si può porre

$$f(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} A$$

perché l'integrale non dipende da x_0, che verrà tenuto fisso al variare di x, e non dipende neppure dalla particolare curva scelta per l'ipotesi di invarianza dal cammino, dato che gli estremi sono in ogni caso x_0 e x, ma dipende solo da x.

Proviamo ora che f è un potenziale per A, ossia che

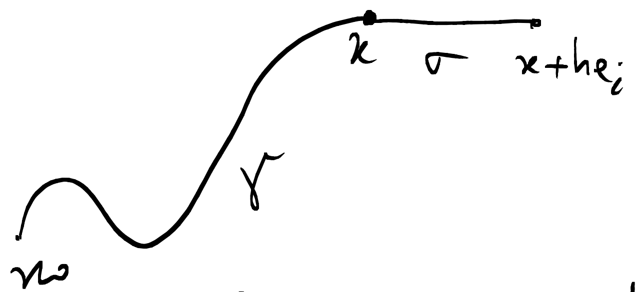
$$f_{x_i}(x) = A_i(x) \qquad i = 1..n$$

Per calcolare le derivate parziali al primo membro supponiamo $h>0$ e consideriamo il relativo rapporto incrementale

$$\frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma(x_0(x+he_i)} - \int_{\gamma_{x_0 x}}\right]$$

ove le curve per i due integrali sono scelte ad arbitrio col solo vincolo sui punti estremi, che sono quelli indicati.

Si sceglie allora, come $\gamma_{x_0 x}$ una qualunque curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ con $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$, e



come $\gamma_{x_0 (x+he_i)}$ la congiunzione fra γ e il segmento di estremi x e $x+he_1$, con valori del parametro fra b e $b+h$, e cioè $\sigma(t) = x + (t-b)e_i$ (verifica $\sigma(b) = x$ e $\sigma(b+h) = x + he_i$)

Posto allora $\gamma_{x_0 (x+he_i)} = \gamma \oplus \sigma$, dal lemma precedente segue

$$\frac{1}{h}\left[\int_{\gamma_{x_0 (x+he_i)}} A - \int_{\gamma_{x_0 x}} A\right] = \frac{1}{h}\left[\int_\gamma A + \int_\sigma A - \int_\gamma A\right] = \frac{1}{h}\int_\sigma A =$$

$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} A(\sigma(t))\,\dot\sigma(t)\,dt =$$

(poiché $[x+(t-b)e_i]^{\cdot} = e_i$)

$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} A(x+(t-b)e_i)\cdot e_i\,dt \underset{\text{ponendo } t-b=s}{=} \frac{1}{h}\int_0^h A_i(x+se_i)\,ds =$$

(per il teorema della media integrale per gli integrandi scalari continui)

$$= A_i(x+\xi e_i) \qquad \text{ove } \xi \in [0,h]$$

Dunque, per ogni $h>0$, esiste $\xi(h) \in [0,h]$ ~~tale che~~

$$\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} = A_i(x+\xi(h)e_i)$$

Dal teorema del confronto, poiché $0 \le \xi(h) \le h$ ne segue che quando $h \to 0$ anche $\xi(h) \to 0$, e poiché A_i è continua per ipotesi, il secondo membro converge per $h \to 0$, e inoltre

$$\lim_{h} A_i(x+\xi(h)e_i) = A_i(x)$$

Dunque, il limite per $h \to 0^+$ del rapporto incrementale esiste e vale $A_i(x)$. In modo analogo viene trattato il caso $h<0$, da cui la tesi.

$\blacksquare$

La verifica della condizione sufficiente è gravosissima; occorrerebbe verificare l'indipendenza dell'integrale dal cammino scelto, una volta fissati gli estremi e il loro ordine. Ciò verrà fatto sviluppando condizioni alternative che la implicano. Una nota positiva, invece, è che il teorema appena provato è costruttivo e permette di costruire il potenziale a partire dal campo, calcolandone l'integrale su curve opportune.

ESEMPIO: Calcolare un potenziale di $x\,dx + y\,dy$.

Il campo associato è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che verifica la condizione

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial A_2}{\partial x}$$

, e dunque nulla osta a che possa essere integrabile. Supposto che lo sia, un potenziale sarà

$$f(x,y) = \int_{\gamma(0,0)(x,y)} A$$

Un cammino facile per andare da $(0,0)$, tenuto fisso, a (x,y), senza mai uscire dal dominio del campo ($\mathbb{R}^2$) è il segmento

$$\gamma(t) = t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1] \quad \text{da cui} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ in } [0,1]$$

e dunque un (candidato) potenziale è

$$\int_\gamma A = \int_0^1 A(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (x^2+y^2)\int_0^1 t = (x^2+y^2)\,\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

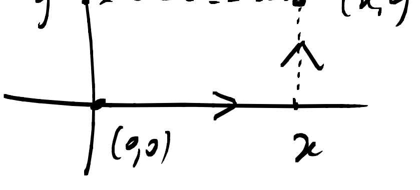
Non abbiamo (per ora) strumenti per decidere se questo valore dell'integrale non dipende dalla curva scelta, ma possiamo, come nell'esempio precedente, usare la forza bruta, talvolta efficacissima; se f è un potenziale, il suo gradiente deve coincidere col campo, e infatti

$$\nabla\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A(x,y)$$

e dunque $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ è un potenziale del campo $A(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ su tutto il suo dominio ($\mathbb{R}^2$).

Più avanti vedremo come si possano trovare tutti i potenziali una volta noto uno di essi, ma per ora accontentiamoci di quello ottenuto, versione in più variabili della primitiva $\int_a^x f(s)\,ds$ ottenuta nel teorema di Torricelli.

Una scelta (a torto o a ragione) preferita al segmento diretto fra $(0,0)$ e (x,y) può essere la spezzata con cui



ci si sposta prima parallelamente all'asse x e poi all'asse y. La spezzata è la congiunzione di segmenti paralleli agli assi, sicché la derivata γ' corrispondente ha una sola componente non nulla (il che elimina dal calcolo tutte le altre componenti del campo). Lo stesso accade invertendo il ruolo degli assi. In pratica

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ ty \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1] \qquad \dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} (t-1)x \\ y \end{pmatrix} \qquad t \in [1,2] \qquad \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} A = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ ty \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} (t-1)x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

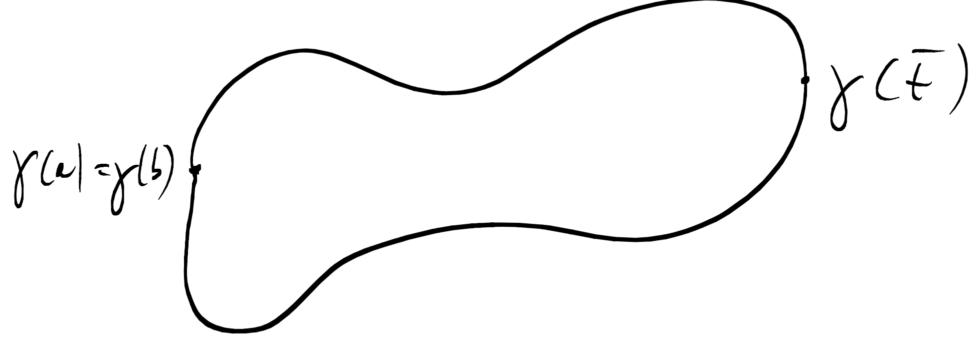
$$= \int_0^1 ty^2\, dt + \int_1^2 (t-1)x^2\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + x^2 \frac{1}{2}(t-1)^2\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Con gli "incrementi ortogonali" si può essere sicuri che tutte le componenti del prodotto scalare meno una sono nulle; è però anche vero che invece di un solo integrale ce ne sono da calcolare n, ed ogni componente del campo, facile o difficile che possa essere da integrare, apparirà in uno degli addendi. Non pare evidente il vantaggio offerto dalla spezzata, salvo che nel caso in cui il segmento diretto esca dal dominio, mentre la spezzata no!

<u>TEOREMA</u> (versione alternativa del teorema fondamentale). <u>Condizione necessaria e sufficiente</u> perché A <u>di classe</u> C^0 <u>sia integrabile</u> è che $\int_\gamma A = 0$ <u>per ogni curva</u> γ <u>chiusa</u>.

DIM. Basta osservare che, per ogni curva chiusa, fissato ad arbitrio $\bar t \in]a,b[$,



essa può essere pensata come congiunzione fra

$$\gamma_1(t)=\gamma(t) \qquad t\in[a,\bar t]$$

e

$$\gamma_2(t)=\gamma(t) \qquad t\in[\bar t,b]$$

e dall'additività segue che $\int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A = 0$ e dunque $\int_{\gamma_2} A = -\int_{\gamma_2} A$

Supponendo ora di sapere che $\int_\gamma A$ non dipende dal cammino si ha che γ_1 e $\ominus\gamma_2$ sono due curve fra gli stessi estremi $\gamma(a)=\gamma(b)$ e $\gamma(\bar t)$ e dunque da

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\ominus\gamma_2} A = -\int_{\gamma_2} A \quad \text{segue} \quad \int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} A = 0$$

mentre, viceversa, sapendo che $\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} A = 0$ ne segue che $\int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A = 0$ da cui

$$\int_{\ominus\gamma_2} A = -\int_{\gamma_2} A = \int_{\gamma_1} A$$

e dunque gli integrali su γ_1 e $\ominus\gamma_2$ sono uguali

$\boxtimes$

Questa condizione non è più facile da verificare delle precedenti, in quanto richiede in ogni caso una verifica sul valore dell'integrale su infinite curve.
Osserviamo comunque che, nelle condizioni del primo esempio, il semplice fatto che l'integrale su una circonferenza valga -2π (e non 0) è sufficiente per escludere l'integrabilità (come già visto nella sezione precedente).
Come il test annullo sul termine generale di una serie, il Test sull'integrale su una singola curva chiusa (scelta con giudizio o per fortuna) che fallisca ($\int \neq 0$), può essere utile per <u>NEGARE</u> l'integrabilità, mentre non consente di trarre alcuna conclusione nel caso "positivo" $\int = 0$.

I CAMPI IRROTAZIONALI: INVARIANZA PER DEFORMAZIONE DELL'INTEGRALE

In questa sezione verrà offerto un (parziale) rimedio alla sfortunata circostanza che vuole che l'essere irrotazionale sia condizione solo necessaria, ed in genere non sufficiente, per l'integrabilità, e verrà introdotta un'ipotesi sul dominio sotto la quale la condizione è anche sufficiente.

L'idea principale è simile a quella suggerita dal teorema fondamentale: nonostante i cammini siano infiniti, alcuni integrali di campi assumono valori indipendenti dai diversi cammini percorsi.

Per esporre il risultato principale è necessaria la seguente

DEFINIZIONE: Due curve $\gamma : [0,1] \to \Omega$ e $\sigma : [0,1] \to \Omega$ si dicono deformabili (od omotope) in Ω se esiste

$$\boxed{h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega}$$

CONTINUA e tale che

$$h(0,t) = \gamma(t) \quad e \quad h(1,t) = \sigma(t)$$

NOTA: al variare di $\lambda \in [0,1]$ la famiglia di curve $t \to h(\lambda, t)$ rappresenta una deformazione continua dalla curva iniziale $t \to h(0,t) = \gamma(t)$ a quella finale $t \to h(1,t) = \sigma(t)$, che non esce mai fuori da Ω.

Il prossimo teorema, riportato senza dimostrazione (G. PRODI: Analisi Matematica II Boringhieri) asserisce l'invarianza per deformazioni dell'integrale dei campi irrotazionali.

TEOREMA: Siano $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ due curve di estremi coincidenti. Sia A un campo irrotazionale in Ω e siano $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ omotope in Ω. Allora

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A$$

La stessa conclusione si ottiene considerando curve chiuse, $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ e $\gamma_2(0) = \gamma_2(1)$ (anche senza punti comuni) invece di curve con estremi uguali.

Dunque, se il campo è irrotazionale e si deforma una curva <u>senza uscire mai dalla regione dove il campo verifica tale ipotesi</u>, l'integrale non varia, esattamente come accadrebbe per l'integrale di un campo potenziale.

Questo teorema offre possibilità sorprendenti. Ad esempio:

"Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$

ove $$\gamma(t) = \left(e^{\sin \operatorname{arctg} t}\cos t,\ e^{\cos 2\operatorname{arctg}\frac{2t}{\pi}}\sin t\right)$$

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
"

Il campo è irrotazionale su $\mathbb{R}^2 - (0,0)$; il percorso ha un aspetto piuttosto inquietante, ma è tuttavia contenuto nel primo quadrante, a causa del segno degli esponenziali, e dell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Dunque si può sostituire alla curva γ un'altra con gli stessi estremi tutta contenuta nel primo quadrante, come vedremo fra un momento. Gli estremi sono

$$\gamma(0) = (1, 0) \quad e \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

Sia allora

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Le due curve hanno gli stessi estremi e sono omotope nel primo quadrante perché, ponendo

$$h(\lambda, t) = (1-\lambda)\gamma(t) + \lambda\,\sigma(t) \qquad \lambda \in [0,1]$$

dal fatto che il primo quadrante è convesso, esso contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi punti $\gamma(t)$ e $\sigma(t)$ e dunque $h : [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \{x>0;\, y>0\}$

Inoltre h è continua e si ha immediatamente

$$h(0,t) = \gamma(t) \quad \text{e} \quad h(1,t) = \sigma(t)$$

Dal teorema segue subito $\int_\gamma A = \int_\sigma A$ e quest'ultimo si calcola immediatamente, come abbiamo visto in precedenza, e vale $-\frac{\pi}{2}$, risultato insospettabile se si pensa al fatto che il calcolo diretto dell'integrale coinvolgerebbe $A(\gamma(t))$ e $\dot\gamma(t)$, entrambi assai intricati.

Per la sua caratteristica, il teorema precedente verrà detto <u>TEOREMA DI INVARIANZA OMOTOPICA</u> (i più scrupolosi aggiungeranno anche: <u>DELL'INTEGRALE DEI CAMPI IRROTAZIONALI</u>).

INSIEMI SEMPLICEMENTE CONNESSI ED INTEGRABILITA' DEI CAMPI IRROTAZIONALI

Una conseguenza pressoché immediata del teorema di invarianza omotopica, molto utile in pratica, si ottiene introducendo un concetto nuovo.

DEFINIZIONE <u>Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà semplicemente connesso se ogni curva chiusa</u> $\gamma : [0,1] \to \Omega$ <u>è omotopa in Ω ad una curva costante</u> $\sigma(t) \equiv x_0 \ \forall t \in [0,1]$

Il teorema, che è proprio quello vagheggiato nelle pagine precedenti e del quale abbiamo già provato la condizione necessaria, è il seguente.

TEOREMA: <u>Sia Ω semplicemente connesso. Allora, condizione necessaria e sufficiente perché un campo in Ω sia integrabile è che sia irrotazionale.</u>

DIM. Sia γ una qualunque curva chiusa in Ω. Per l'ipotesi, γ è omotopa in Ω ad una curva costante σ ed essendo il campo irrotazionale, dal teorema di invarianza omotopica segue che $\int_\gamma A = \int_\sigma A$.

D'altronde, poiché σ è costante, ne segue che $\dot\sigma \equiv 0$ e dunque

$$\int_\sigma A = \int_0^1 A(\sigma(t))\,\dot\sigma(t)\,dt = 0$$

Poiché $\int_\gamma A = \int_\sigma A$ ne segue infine che l'integrale su ogni curva chiusa è nullo, il che è (necessario e) sufficiente perché A sia integrabile.

$\boxed{///}$

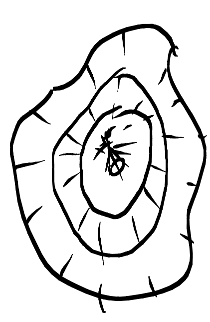
Il problema si è però spostato: come stabilire se Ω è semplicemente connesso? Alcuni casi importanti sono facili da affrontare.

Ad esempio, se Ω è convesso e $x_0 \in \Omega$ allora, per ogni $x \in \Omega$ tutto il segmento $\overrightarrow{x_0 x} \subseteq \Omega$ e dunque, per definire l'omotopia fra γ ed una curva costante basta porre

$$h(\lambda,t) = x_0 + (1-\lambda)\left[\gamma(t) - x_0\right]$$

Per meglio capire il meccanismo sia $x_0 = 0$. In tal caso

$$h(\lambda,t) = (1-\lambda)\,\gamma(t)$$

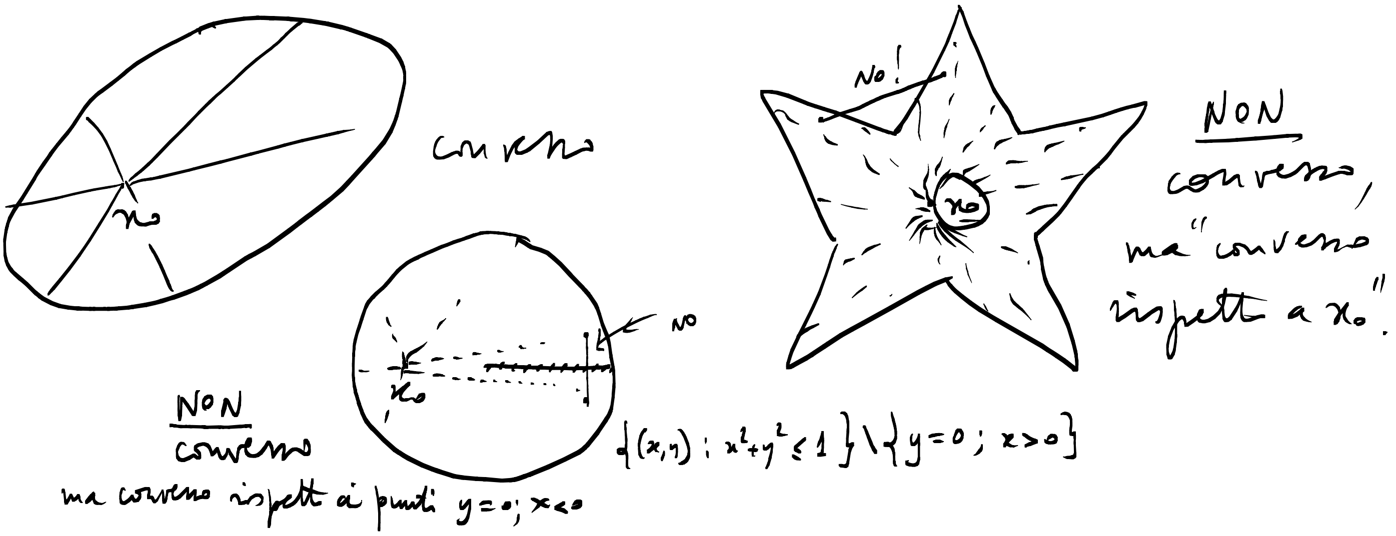


Al crescere di λ verso 1, $(1-\lambda)$ tende a 0, e dunque ogni vettore $\gamma(t)$, $t\in[0,1]$, si muove lungo la semiretta definita da $\gamma(t)$ verso l'origine.

La stessa idea può essere utilizzata anche sotto ipotesi considerevolmente più generali su Ω.

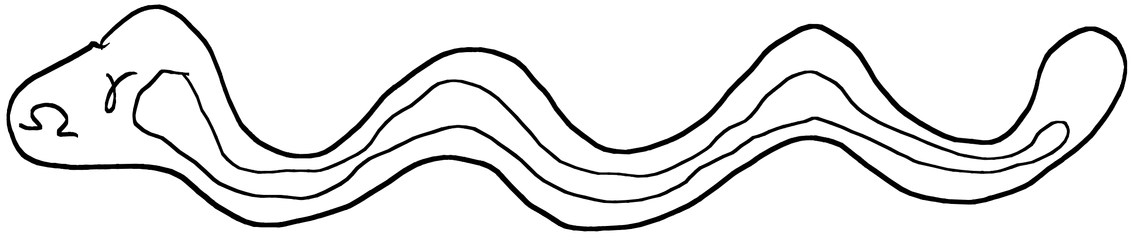
DEFINIZIONE $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ verrà detto **stella** se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che il segmento $\overline{x_0 x} \subseteq \Omega$ per ogni $x \in \Omega$.

In sostanza, Ω è stella (o anche "stellato", ma non lo sopporto!) se esiste un suo punto che "vede" tutti gli altri. In tempi passati gli insiemi stella venivano chiamati "convessi rispetto ad un punto (x_0)", nome molto espressivo, ma un po' magniloquente. I convessi prima trattati sono stelle, qualunque punto si scelga in essi come x_0.



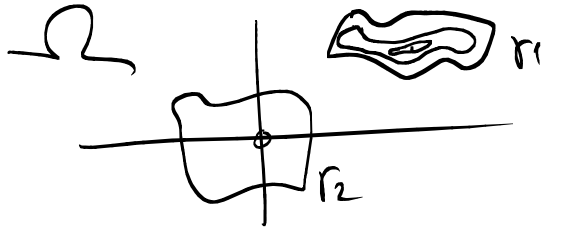
Gli insiemi stella sono semplicemente connessi: la dimostrazione è identica, ma invece di scegliere a caso x_0, si deve scegliere quello che appare nella loro definizione.

Per meglio chiarire come stanno le cose, ecco due esempi:



La regione Ω non è né convessa né stellata, ma è semplicemente connessa: qualunque curva chiusa può deformarsi lungo "le anse" di Ω, fino a farla collassare in un punto.

La regione $\Omega = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, invece,



NON è semplicemente connessa: ci sono curve chiuse che si possono agevolmente deformare in una costante, come γ_1; ce ne sono altre, come γ_2, per cui ciò non è possibile: qualunque deformazione di γ_2 in un punto non potrà evitare che γ_2 passi per l'origine, che NON sta in $\Omega = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, e dunque la deformazione corrispondente NON è un'omotopia in Ω: NON DIMENTICARE CHE IL CODOMINIO DI UN'OMOTOPIA IN Ω È Ω.

Se si potesse uscire da Ω ogni curva si potrebbe deformare nella curva costante $\sigma(t) = 0$, semplicemente ponendo $h(\lambda, t) = (1-\lambda)\gamma(t)$, come abbiamo già fatto prima trattando di Ω convessi e contenenti l'origine.