Titolo nota 13/05/2012

CAMPI VETTORIALI E FORME DIFFERENZIALI

Per le funzioni di più variabili due sono i concetti, diversi ma strettamente correlati, che sostituiscono il concetto di derivata: il gradiente - il vettore delle derivate parziali nel punto - e il differenziale - la funzione lineare nell'incremento, associata al punto, l'incremento della quale approssima meglio quello della funzione.

I campi di vettori (o campi vettoriali o, più semplicemente: campi) e le forme differenziali sono gli oggetti astratti della stessa natura, rispettivamente, del gradiente e del differenziale.

DEFINIZIONE: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce campo (di vettori) in Ω, di classe C^k, una funzione $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$, le cui componenti scalari $(A \equiv (A_1, A_2, \dots, A^n)$ sono tutte funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ continue con le loro derivate fino all'ordine k.

NOTA: Il vettore "di arrivo" $A(x)$ ha lo stesso numero di componenti scalari del vettore di partenza x.

ESEMPI: la forza di gravità associa ad ogni punto dello spazio una forza (che si può misurare con una massa di prova, piccola da poter trascurare il campo da essa generato rispetto a quello sotto misura) che è un vettore a tre componenti, tante quante quelle dello spazio nel quale il campo è immerso.

Analogamente, in un fiume, che occupa una regione dello spazio, è possibile associare ad ogni punto la velocità del flusso in quel punto, che ha tre componenti come la regione occupata dalla massa d'acqua.

Esempi (matematici): un campo piano (ovvero definito in $\mathbb{R}^2$ o un suo sottinsieme) si definisce fissando una coppia di funzioni $(a(x,y), b(x,y))$ che, assieme, individuano il vettore di $\mathbb{R}^2$ associato al punto (x,y), anch'esso in $\mathbb{R}^2$.

Il campo $(|x|+y, \sin xy)$ è un campo piano di classe

$C^0(\mathbb{R}^2)$, perché entrambe le funzioni $(x,y) \to |x|+y$ e $(x,y) \to \sin xy$ sono continue, ma non di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, perché la funzione $(x,y) \to |x|+y$ non è derivabile rispetto ad x in tutti i punti nei quali $x=0$, e cioè sull'asse y.

Il campo è invece di classe $C^\infty(]0,+\infty[\times]0,+\infty[)$, perché nel quadrante $x>0$ $y>0$ $|x|=x$ e dunque entrambe le componenti del campo sono funzioni con derivate di tutti gli ordini continue.

Come ulteriore esempio, consideriamo il campo della gravità generato da una massa M puntiforme o anche – grazie a Newton – da una massa generica che si può pensare come se fosse concentrata nel suo centro di massa, e che supporremo posizionata nell'origine. In tal caso, posta una massa piccola m nel punto di coordinate $x=(x_1,x_2,x_3)$ la forza di gravità ha modulo $|F| = GmM/|x|^2$, è diretta come il vettore x, che dà la retta $0x$, ed è attrattiva, e quindi ha il verso del vettore $-x$, perché x è diretto dall'origine verso l'esterno.

Per ottenere un vettore di modulo, direzione e verso fissati, basta moltiplicare il modulo per il versore individuato da direzione e verso, e dunque

$$F(x) = \underbrace{G\frac{mM}{|x|^2}}_{\text{modulo di } F} \cdot \underbrace{-\frac{x}{|x|}}_{\text{versore di } -x} = -G\frac{mM}{|x|^3}\, x$$

ovvero, in componenti scalari,

$$\left(F_1(x_1,x_2,x_3),\ F_2(x_1,x_2,x_3),\ F_3(x_1,x_2,x_3) \right) =$$

$$= -\frac{GmM}{\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3}}\,(x_1,x_2,x_3)$$

Il vettore della forza di gravità nel punto (x_1, x_2, x_3) ha tre componenti (F_1, F_2, F_3), non è definito in $(0,0,0)$ (le stelle a neutroni o i buchi neri ci danno un'idea di cosa accade ad andare troppo vicino a tanta massa, anche trascurando gli effetti relativistici) ed è un campo di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$, perché tali sono le sue componenti scalari.

Altrettanto rilevante, dal punto di vista teorico e pratico, è il concetto di forma.

DEFINIZIONE: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si definisce forma differenziale lineare (o, più brevemente, forma differenziale, o addirittura solo forma), una funzione $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\bar{x} \in \Omega$, la funzione $t \to \alpha(\bar{x}, t)$ sia lineare in t.

NOTA: Poiché ogni funzione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ è uguale al prodotto scalare del suo argomento per il vettore formato dalle immagini dei vettori della base canonica in $\mathbb{R}^n$, data una qualunque forma $\alpha(x,w)$, per la quale dunque $w \longrightarrow \alpha(x,w)$ è lineare per ogni x fissato, si può definire un campo di vettori $A(x)$ tale che

$$\alpha(x,w) = A(x)\,w \qquad (*)$$

Infatti, fissato x, $\alpha(x,w) = \alpha\left(x, \sum_1^n w_i e_i\right) =$
$= \sum_1^n w_i\, \alpha(x, e_i)$ e, posto $A(x) = \alpha(x, e_i)$ ne segue immediatamente $(*)$.

Il campo di vettori $A(x)$ verrà detto <u>campo associato alla forma</u> α, e α verrà detta di classe C^k se e solo se A è di classe C^k.

Analogamente, dato un campo A, si definisce <u>la forma associata ad</u> A <u>ponendo</u>

$$\alpha(x,w) = A(x)\,w$$

<u>NOTAZIONI ED ESEMPI:</u>

L'espressione generale di una forma $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mediante l'equazione (*) precedente è

$$\alpha(x, w) = A(x) w = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) w_i$$

e dunque, in $\mathbb{R}^2$, l'espressione generale di una forma sarà

$$\alpha(x_1, x_2 ; w_1, w_2) = A_1(x_1, x_2) w_1 + A_2(x_1, x_2) w_2$$

o, in $\mathbb{R}^3$, $\alpha(x, w) = \alpha(x_1, x_2, x_3 ; w_1, w_2, w_3)$ sarà

$$A_1(x_1, x_2, x_3) w_1 + A_2(x_1, x_2, x_3) w_2 + A_3(x_1, x_2, x_3) w_3$$

A parte la consuetudine di indicare con x, y, z le variabili x_1, x_2, x_3, ce n'è un'altra degna di nota, derivante dalla storia di questi concetti.

Se si considera il differenziale della funzione lineare

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{\Pi_i} x_i$$

che associa ad ogni vettore la sua componente i-esima esso, nel punto x_0 e sull'incremento w, risulta uguale al suo valore su w, $\Pi_i(w_1, w_2, \dots, w_n) = w_i$, così

$$d\Pi_i(x_0, w) = w_i \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Tradizionalmente, si denota con dx_i il differenziale $d\Pi_i$ e si omettono i suoi argomenti, sicché l'espressione generale di una forma differenziale in $\mathbb{R}^n$ diventa

$$\alpha = \sum_{1}^{n} A_i(x_1 \dots x_n)\, dx_i$$

Così vengono rappresentate in fisica, ed anche nella stragrande maggioranza delle opere matematiche, le forme differenziali. Per gli antichi, $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ era uno spostamento infinitesimo e, ad esempio, il prodotto scalare $A dx$ della forza per lo spostamento, era il lavoro (infinitesimo) compiuto dal campo durante lo spostamento (infinitesimo) dx.

Poiché i matematici (eccezion fatta per coloro i quali studiano l'"Analisi non standard") non amano più il concetto di infinitesimo "in atto" – come il piccolo intervallo di tempo o il piccolo spostamento – ma solo "in potenza" – una funzione che tende a zero – avrebbe forse più senso cambiare notazione. Ciò non è però accaduto, ed oggi, e dunque gli esempi precedenti di forme in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ vengono di solito denotati con

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

e

$$A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$$

Osserviamo che è immediato, dall'espressione d'una forma

$$\alpha(x, dx) = \sum A_i(x)\, dx_i \,,$$

dedurre quella del campo associato $A(x)$, che è

$$A(x) = (A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x))$$

e viceversa.

L'INTEGRALE DI UN CAMPO O DI UNA FORMA

Iniziamo subito col dire che l'integrale di una forma coincide con l'integrale del campo associato. Per i campi, invece:

DEFINIZIONE: Sia $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo di classe $C^0(\Omega)$. Per ogni curva parametrica $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$, si definisce l'integrale di A esteso a γ ponendo

$$\int_\gamma A \equiv \int_a^b A(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt$$

prodotto scalare

Esempio: Sia $A = \left(\frac{y}{x^2+y^2} , -\frac{x}{x^2+y^2} \right)$

e sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ e dunque } \left(\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\cos} t \\ \dot{\sin} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right)$$

Allora,

$$A(\gamma(t)) = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} , \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) = (\sin t, -\cos t)$$

e infine

$$\int_\gamma A = \int_0^{2\pi} \overbrace{(\sin t, -\cos t)}^{A(\gamma(t))} \cdot \overbrace{(-\sin t, \cos t)}^{\dot\gamma(t)} \, dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) \, dt =$$

$$= -2\pi$$

NOTA: l'integrale $\int_a^b A(\gamma(t)) \dot\gamma(t) \, dt$ ha un profondo significato fisico. Nel caso A sia un campo di forze, e $\gamma(t)$ descrive un moto immerso nel campo, $\dot\gamma(t)$ è la velocità nel punto $\gamma(t)$ e dunque $\dot\gamma(t)\,dt$ è il prodotto della velocità per il tempo, e quindi lo spostamento. Dunque $\int_\gamma A$ rappresenta il lavoro compiuto dal campo A sulla particella che descrive la curva $\gamma(t)$ (il lavoro "elementare" $A(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,dt$ è il prodotto scalare della forza $A(\gamma(t))$ nel punto $\gamma(t)$ per lo spostamento "elementare" $\dot\gamma(t)\,dt$, e l'integrale "somma" tutti i lavori elementari.)

IL PROBLEMA DELLA PRIMITIVA

E' stato già osservato che, data f differenziabile in Ω a valori reali, $\nabla f(x)$ è un campo di vettori e $df(x, w)$ è una forma differenziale. Per le funzioni di una sola variabile, il teorema di Torricelli risolve brillantemente il problema

"Data una f, esiste F tale che $F' = f$"?

Esso ha risposta affermativa se f è continua, mentre dà luogo ad un guazzabuglio se f è discontinua, chiarito solo agli inizi del secolo scorso.

I due problemi corrispondenti al problema della primitiva, nel caso delle funzioni di più variabili, sono:

"Dato un campo A, esiste f tale che $\nabla f = A$"?

ovvero, per le forme,

"Data una forma α, esiste f tale che $df = \alpha$"?

I due problemi sono strettamente correlati. Infatti rappresentando df e α con i loro campi associati si ottiene

$$\nabla f(x) w = df(x, w) = \alpha(x, w) = A(x) w$$

da cui

$$\left(\nabla f(x) - A(x)\right) w \equiv 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

e, in particolare, per $w = \nabla f(x) - A(x)$, segue

$$|\nabla f(x) - A(x)|^2 = \left(\nabla f(x) - A(x)\right)\left(\nabla f(x) - A(x)\right) = 0$$

e dunque

$$\nabla f(x) - A(x) = 0$$

In sostanza risolvere il secondo problema, relativo alla forma α, comporta esattamente la risoluzione del primo problema per il campo associato $A(x)$.

Viceversa se A è di classe C^0 l'eventuale soluzione f del primo problema $\nabla f = A$ è una funzione le cui derivate sono le componenti di A e sono quindi continue. Ne segue che f, avendo derivate continue, è differenziabile e inoltre

$$df(x, w) = \nabla f(x) w$$

da cui infine ne segue che f risolve il secondo problema per le forme differenziali α associate ad A.

Dunque, limiteremo lo studio al problema delle primitive di un campo di classe C^0, e introduciamo la seguente

DEFINIZIONE: Un campo di vettori $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dirà integrabile (o anche campo potenziale) se esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x) = A(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Ogni funzione f verificante l'identità precedente si dirà primitiva (o potenziale) del campo.

Le definizioni corrispondenti per le forme utilizzano una terminologia differente, o almeno è tale quella più diffusa.

DEFINIZIONE: Una forma $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verrà detta integrabile (o esatta, o un differenziale esatto) se esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $df \equiv \alpha$ in $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Ogni funzione verificante tale identità verrà detta primitiva (o potenziale) della forma α in Ω.

Dunque, si può usare la terminologia asettica dei matematici, e parlare di integrabilità e primitive, oppure quella classica: i campi sono campi potenziali e hanno potenziali; le forme sono esatte e hanno potenziali.
I campi potenziali sono poi detti anche CONSERVATIVI.

CONDIZIONI NECESSARIE DI INTEGRABILITÀ

La situazione in più variabili è considerevolmente diversa da quella in una variabile, dove la continuità basta ad assicurare l'esistenza di primitive.
Per illustrare i problemi nei quali si incappa, è indispensabile il seguente:

TEOREMA (fondamentale) <u>Condizione necessaria e sufficiente</u> <u>perché un campo</u> A <u>sia integrabile è che</u> $\int_\gamma A$ <u>sia indipendente del cammino</u> γ, <u>ma dipende solo dalla coppia</u> (<u>ordinata</u>!) <u>dei punti</u> $\gamma(a)$ <u>e</u> $\gamma(b)$.

DIM. La prova della condizione sufficiente verrà svolta nella prossima sezione. Per la condizione necessaria assumiamo che A sia integrabile e proviamo che l'integrale non varia tenendo fissi gli estremi e facendo variare ad arbitrio il cammino che li congiunge.
Poiché A è integrabile, esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f = A$.
Allora, per ogni curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ di classe C^1 si avrà

$$\int_\gamma A \equiv \int_a^b A(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right]dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

(ancora Torricelli!)

Dunque, qualunque cammino percorra la curva parametrica γ, l'integrale alla fine sarà uguale alla differenza fra i valori che il potenziale f assume nel punto finale $\gamma(b)$ e nel punto iniziale $\gamma(a)$, e dunque dipende solo dai punti iniziale e finale della curva e non dalla via percorsa per congiungerli.

In fisica il conto precedente è piuttosto noto: "Il lavoro compiuto da un campo potenziale è la differenza di potenziale fra il punto finale ed il punto iniziale".

Un'altra forma della condizione precedente riguarda le curve chiuse.

DEFINIZIONE: Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

TEOREMA: Se A è integrabile $\int_\gamma A = 0$

per ogni curva $\gamma \in C^1$ chiusa.

DIM. $\gamma(b) = \gamma(a) \Rightarrow f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$

NOTA: Osserviamo che il campo dell'esempio precedente ha integrale sulla circonferenza unitaria $(\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ uguale a -2π. Poiché $(\cos 0, \sin 0) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi)$, la curva è chiusa e, poiché l'integrale su una curva chiusa non è nullo, ne segue che il campo **NON** è integrabile su $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, pur avendo componenti $\frac{y}{x^2+y^2}$ e $\frac{-x}{x^2+y^2}$ che sono $C^\infty(\mathbb{R}^2 - (0,0))$.

La pessima notizia è che, diversamente da quanto accade per le funzioni di una variabile, non basta che un campo sia continuo, o anche C^∞, perché risulti integrabile.

Il prossimo teorema getta un'ulteriore luce sulla questione.

TEOREMA Condizione necessaria perché un campo A di classe C^1 sia integrabile è che

$$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i \neq j$$

Dim. Infatti, se A è integrabile, esiste f tale che

$$\nabla f = A$$

e cioè

$$f_{x_i} = A_i \qquad i = 1..n$$

Ne segue che

$$(A_i)_{x_j} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_j x_i}$$

e inoltre

$$(A_j)_{x_i} = (f_{x_j})_{x_i} = f_{x_i x_j}$$

Poiché il campo A è di classe C^1 e le sue componenti sono le derivate di f ne segue che f è di classe C^2 e la tesi segue immediatamente dal teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate miste.

ESEMPIO: Il maledetto esempio precedente verifica la condizione del teorema. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1}$$

e le due derivate sono UGUALI!

Ne segue l'ulteriore pessima notizia:

TEOREMA <u>La condizione del teorema precedente NON è, in generale, sufficiente</u>

E' un vero peccato, perché una condizione sulle derivate avrebbe richiesto poca fatica per la verifica! In una delle prossime sezioni verranno esaminate condizioni sul dominio sotto le quali la condizione diventa anche sufficiente, ma in generale NON è così: l'esempio parla chiaro!

La condizione precedente ricorda vagamente quella $a_n \to 0$ per il termine generale di una serie: necessaria, ma non sufficiente! E' comunque così importante da meritare una definizione.

DEFINIZIONE: <u>Un campo A di classe C^1 è detto irrotazionale se</u> $(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i \neq j$.

<u>Una forma differenziale $\alpha(x,w) = A(x)w$ è detta chiusa se è verificata la stessa condizione per il suo campo associato A.</u>

Anche qui è la solita Babele!
La condizione necessaria precedente si può esprimere dicendo che un campo C^1 potenziale (o integrabile) è irrotazionale, ovvero una forma esatta è anche chiusa.
Il seguente esempio dà un'idea piuttosto precisa su quanto sia difficile assegnare "a caso" due funzioni scalari ed ottenere un campo integrabile, o anche solo irrotazionale.

ESERCIZIO: "Determinare $b(x,y)$ in modo che il campo $(xy, b(x,y))$ sia irrotazionale".

Naturalmente, che il campo sia irrotazionale non dice nulla sulla sua integrabilità, ma di certo se il campo non è irrotazionale non è, "a fortiori", nemmeno integrabile!

$$A_1(x,y) = xy \qquad A_2(x,y) = b(x,y)$$

$$(A_1)_y = (A_2)_x$$

e cioè
$$x = b_x(x,y)$$

Integrando ambo i membri rispetto ad x si ottiene

$$b(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)$$

e dunque $\left(xy, \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)\right)$ è irrotazionale per ogni funzione arbitraria $\varphi(y)$.

Si vede bene che b è ben lungi da poter essere fissata ad arbitrio; deve essere della forma $\frac{1}{2}x^2$ più una funzione arbitraria della sola y. L'eventuale potenziale dovrà verificare

$$\begin{cases} f_x = xy \\ f_y = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y) \end{cases}$$

e dunque, integrando la prima rispetto ad x si ottiene

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+c(y)$$

e, derivando rispetto ad y e uguagliando le due espressioni per f_y si ha infine

$$\frac{1}{2}x^2+\varphi(y)=f_y(x,y)=\frac{1}{2}x^2+c'(y)$$

da cui infine $c'(y)=\varphi(y)$ e dunque

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\Phi(y)$$

ove Φ è una qualunque primitiva di φ (per essere certi che esista è sufficiente supporre φ almeno continua!)

Ad ogni buon conto, la f così trovata è o non è un potenziale del campo $(xy,\ \frac{1}{2}x^2+\varphi(y))$? Non abbiamo teoremi che ce lo assicurino, ma da $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\Phi(y)$ segue subito $f_x=xy$ e $f_y=\frac{1}{2}x^2+\Phi'(y)=\frac{1}{2}x^2+\varphi(y)$, e dunque f è un potenziale del campo.

NOTA:

Il modo più semplice per fornire un esempio di campo irrotazionale è di considerare il gradiente di una funzione: la condizione necessaria fa il resto!