IL CAMBIO DI VARIABILE NEL CALCOLO DEI LIMITI

Una tecnica piuttosto nota, efficace, ed insegnata nelle scuole, per il calcolo dei limiti fa uso del cambio di variabile. Un esempio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} \underset{x^2=y}{``="} \lim_{\substack{x\to 0\\ \Downarrow\\ y\to 0}} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Tecnica elegante, suggestiva, apparentemente efficace ma, in generale, <u>FALSA</u>! Infatti, siano

$$g(y)=\begin{cases}1 & \text{se } y=0\\ 0 & \text{se } y\neq 0\end{cases} \qquad f(x)=x\sin\frac{1}{x}$$

Si ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ e $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=0$

In tal caso $g(f(x))$, che calcoleremo esplicitamente più giù, dovrebbe avere limite

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) \underset{y=f(x)}{``="} \lim_{\substack{x\to 0\\ \Downarrow\\ y\to 0}} g(y) = 0$$

ma ciò è FALSO! Infatti

$$g(f(y)) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{k\pi} \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché $\lim_{k} \frac{1}{k\pi} = 0$, vuol dire che in ogni intorno di centro 0 esistono punti sui quali $g(f(x)) = 1$, e dunque essa non può essere infinitesima in 0, in quanto viene violata la condizione di Cauchy.

Tutto diventa più chiaro se si cerca di dimostrare il teorema corrispondente:

"TEOREMA" FALSO!!! ~~Siano~~

$$f : \Omega \to \Sigma \qquad g : \Sigma \to \Theta$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$, e valgano inoltre

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{y \to L} g(y) = M$$

"ALLORA" (si sa dall'esempio che è FALSO!)

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to L} g(y) = M$$

DIM.

Per provare la tesi occorre verificare che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} g(f(x)) \ |x - x_0| < \delta \ \ x \neq x_0$ si abbia

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon$$

Dall'ipotesi sulla g si ha che, in corrispondenza allo <u>STESSO</u> ε precedente

$\exists \sigma > 0 : \forall y \in \operatorname{dom} g \ |y - L| < \sigma \ \ y \neq L$ risulta

$$|g(y) - M| < \varepsilon$$

e ciò è esattamente quanto richiesto, a patto di poter sostituire y con $f(x)$ (e cioè combinare variabili!)

Per poter fare $y = f(x)$ occorre che

- $f(x) \in \operatorname{dom} g$
- $|f(x) - L| < \sigma$
- $f(x) \neq L$

Le ipotesi assunte garantiscono le prime due, perché $f : \Omega \to \Sigma$ e $\operatorname{dom} g = \Sigma$ e perché, dall'ipotesi su f, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e quindi, dato il σ precedente esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{dom} f$, $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ si ha proprio $|f(x) - L| < \sigma$.

NON GARANTISCONO, INVECE, IN ALCUN MODO, LA CONDIZIONE $f(x) \neq L$.

Nel controesempio, infatti, $L = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

ed $f(x) = 0$ per ogni $x = \frac{1}{k\pi}$, ed in ogni intorno comunque piccolo di 0 si troveranno tali punti, che sono proprio quelli che fanno saltare il teorema.

Il controesempio, per quanto fastidioso, è nella natura delle cose. L'ipotesi $\lim_{y \to L} g(y) = M$ fornisce stime su

$$|g(y) - M|$$

solo per i punti vicini ad L, MA DISTINTI DA ESSO! NULLA DICE, O PUO' DIRE, per $y = L$.

Quanto detto poi ci indica chiaramente il problema e le sue possibili soluzioni.

TEOREMA 1 (VERO!) : Siano

$f : \Omega \to \Sigma$ verificante $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

e

$g : I \to \mathbb{R}$ continua in L

Allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(L)$$

Dim. In tal caso la continuità fornisce la stima $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0 : \forall y \in \mathrm{dom}\, g\ \ |y - L| < \sigma$ si ha

$$|g(y) - g(L)| < \varepsilon$$

senza alcuna necessità di escludere il caso $y = L$ e ciò elimina il problema alla radice.

$\boxed{//}$

Un altro modo draconiano, ma molto utile in pratica in tutti i casi nei quali il teorema precedente sia inutilizzabile (come nell'esempio iniziale), è il seguente

TEOREMA 2 (VERO ANCH'ESSO!) dato

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ verificante $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

e

$g : \Sigma \to \mathbb{R}^p$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, <u>verificante</u>

$$\lim_{y \to L} g(y) = M$$

<u>e sia inoltre</u> g sia <u>NON DEFINITA IN</u> L.

<u>Allora</u>, <u>se</u> x_0 <u>è di accumulazione per il dominio</u> <u>di</u> $g(f(x))$ <u>si ha</u>:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$$

<u>Dim</u>. La condizione $x_0 \in \partial \operatorname{dom} g(f(x))$ serve solo a garantire di poter considerare il limite della tesi.

La prova, in tal caso, è esattamente quella del teorema FALSO "dimostrato" prima, perché in tal caso, per ogni x per cui $f(x) = L$ (quelli "proibiti"), la funzione composta $g(f(x)) = g(L)$ non è definita, e dunque tali punti non appartengono al $\operatorname{dom} g(f(x))$ e non devono essere considerati nella disuguaglianza del limite che esprime la tesi.

$\blacksquare$

Questo teorema giustifica il cambio di variabile nell'esempio iniziale di queste note: la funzione "più esterna" $g(y) = \sin y / y$ NON è definita in $L = 0$.

Quali casi restano esclusi dai due risultati precedenti e devono dunque porre in allarme l'utilizzatore finale del cambio di variabili? Si può cambiare variabile se la funzione "esterna" è continua, oppure se non è definita. Resta fuori il caso in cui è definita "male", nel senso che è definita, ma discontinua in L.
Una soluzione in tal caso, di uso pratico piuttosto farraginoso, è espressa dal seguente

TEOREMA 3 (pressoché inutilizzabile, ma VERO!):

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ed esista $\eta > 0$: $f(x) \neq L \ \forall x \neq x_0$ verificante

$$|x - x_0| < \eta$$

Sia poi

$g : \Sigma \to \mathbb{R}^p$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, tale che

$$\lim_{y \to L} g(y) = M \neq g(L)$$

Allora, se $x_0 \in \partial \operatorname{dom} g(f(x))$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$$

DIM.

In tal caso, i punti "proibiti" nei quali $f(x)=L$ vengono esclusi per ipotesi da tutto l'intorno $B_\eta(x_0)$, con l'eventuale eccezione del punto x_0, che verrà comunque soppresso dalla definizione stessa di $\lim_{x \to x_0} g(f(x))$.

Dunque, dentro $B_\eta(x_0)$ non ci sono altri punti, a parte al più x_0, nei quali $f(x)=L$, e ne segue che i problemi segnalati nel controesempio, e derivanti dalla condizione $y \neq L$ per la validità della stima $|g(y)-M|<\varepsilon$, non hanno ragion d'essere quando si fa $y=f(x)$. $\boxtimes$

Quest'ipotesi è di impiego assai difficile, in generale. Occorre determinare tutte le soluzioni di $f(x)=L$, e verificare che x_0 è isolato rispetto all'insieme di tali soluzioni.
Di regola provare che g è continua in L, o non definita in L, è assai più facile.

Un'ultima osservazione sul fatto che le condizioni precedenti sono in certo senso anche necessarie a che il limite della funzione composta esista.

Supponiamo che non si verifichi nessuna delle ipotesi dei tre teoremi validi. Allora g è definita e discontinua per $y=L$ ed f assume infinite volte il valore L, ma non vale costantemente L in un intorno ("eventualmente bucato") di x_0.

In tal caso si verifica esattamente lo scenario del contro=

esempio: la funzione composta farà costantemente $g(L)$ in tali infiniti punti in ogni intorno di x_0, mentre tenderà ad $M \neq g(L)$ in tutti gli altri, per effetto del "teorema" iniziale, che è vero se $f(x) \neq L$.

Se infine $f(x) \equiv L$ in $B_\eta(x_0) - \{x_0\}$ allora $g(f(x)) \equiv g(L)$ in $B_\eta(x_0) - \{x_0\}$ e dunque in tale "strano" caso $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(L)$, comunque diverso dal valore "previsto" M.

CONCLUSIONE: Come per molte proprietà basilari dell'Analisi, il cambio di variabile nei limiti non è un diritto civile: è un **TEOREMA** (tre, nel nostro caso) valido solo sotto opportune ipotesi.

In pratica, basta definire con cura le funzioni componenti e verificare la continuità di g o il fatto che essa non sia definita nel punto nel quale è noto il suo limite.

Come esempio di applicazione rilevante, dimostriamo il teorema sulla derivazione di funzioni composte in $\mathbb{R}$.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{se } f(x) \neq f(x_0) \\ 0 & \text{se } f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Consideriamo il limite per $x \to x_0$ nelle due regioni.

Se $f(x) \neq f(x_0)$, il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

può essere calcolato con il cambio di variabile $y = f(x)$ perché la funzione "più esterna" è

$$\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)},$$ che non è definita in

$y = f(x_0)$ (che è ciò a cui tende $f(x)$ quando $x \to x_0$),

e dunque $$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

Resta il problema di stabilire cosa accade sull'altro sottoinsieme del dominio, $\{x : f(x) = f(x_0)\}$: su di esso il rapporto incrementale di $g(f(x))$ è identicamente nullo ed ha limite 0.
Osserviamo che, se $f'(x_0) \neq 0$, per la permanenza del segno il rapporto incrementale $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è non nullo in tutto un "intorno" $B_\delta(x_0) - \{x_0\}$, nel quale dunque $f(x) \neq f(x_0)$.
Ne segue che se $f'(x_0) \neq 0$, l'insieme $\{x : f(x) = f(x_0)\}$ dista almeno δ da x_0, ed il comportamento di f su di esso non influirà sul limite in x_0: si usa allora il teorema 3.
Se invece $f'(x_0) = 0$, allora $g(f(x_0)) f'(x_0) = 0$ e dunque i limiti sui due insiemi $\{f(x) \neq f(x_0)\}$ e $\{f(x) = f(x_0)\}$

sono entrambi nulli (e quindi uguali fra loro) da cui infine risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))\, f'(x_0) = 0$$

$\boxed{\not\square}$

Ecco dimostrata la più potente formula del calcolo differenziale! Ci sono prove più dirette (cfr. G. Prodi: Analisi Matematica I Boringhieri).

Un esempio, meno sottile e più semplice, è il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

che vale $\frac{1}{2}$, perché la funzione è composta da

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ che è la norma in $\mathbb{R}^2$, e tende a $L=0$ se il vettore (x,y) tende a $(0,0)$ (per definizione di convergenza),

e da

$g(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ che <u>non è definita</u> in $L=0$ ma che converge in tale punto a $\frac{1}{2}$.

In questo caso è stato adoperato, senza pena, il teorema 2.

Per tornare al "vecchio stile", si potrebbe ragionare così

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \underset{t=\sqrt{x^2+y^2}}{\overset{?}{=}} \lim_{\substack{x,y\to 0 \\ \Downarrow \\ t\to 0}} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Il punto interrogativo serve a ricordare che l'uguaglianza dei due limiti è di solito FALSA, ma (ed è questo che occorre sveglierci) in tal caso è vera perché la funzione nel limite a secondo membro non è definita (Th. 2) [o è continua (Th 1) o infine (disastro!) è definita e discontinua, ma quella più interna, che definisce la variabile t, non assume mai il valore proibito L vicino ad x_0 se non, al più, in x_0 stesso]!

Tutto sommato, per cambiare variabile decentemente ci vuole la stessa fatica che per farlo scorrettamente.

Va comunque riconosciuto che gli esempi di funzioni discontinue hanno un che di artificiale, di "puramente matematico" e "poco pratico": ciò spiega adeguatamente la ragione per la quale tale questione viene di solito ignorata.

I risultati precedenti chiariscono completamente la situazione: ciascuno decida per sé per il meglio!