CALCOLO "PRATICO" DEL DETERMINANTE.

La nota che segue presenta come impiegare tecniche simili a quelle impiegate nell'algoritmo di Gauss (di eliminazione) per calcolare il determinante di una matrice.
La tecnica è basata sui seguenti risultati:

1) Il determinante non varia se si somma ad una riga una combinazione lineare delle altre o, in particolare, un multiplo di un'altra.

2) Il determinante cambia segno se si scambiano due righe o due colonne.

3) Il determinante di una matrice triangolare coincide col prodotto degli elementi diagonali.

La strategia consiste nel trasformare la matrice in forma triangolare, adoperando le stesse operazioni impiegate nell'algoritmo di eliminazione, che consistono nel permutare righe o colonne, il che cambia di segno il determinante o nel sommare ad una riga un multiplo di un'altra, il che lo lascia inalterato, calcolando il determinante della matrice triangolare ottenuta alla fine moltiplicando gli elementi sulla diagonale. Ciò è certamente possibile se la matrice è regolare. L'unica variante, rispetto all'algoritmo di Gauss, è rappresentata dalla necessità di tenere il conto di tutte le permutazioni, di righe come di colonne, in quanto ciascuna d'esse cambia il segno del determinante.

ESEMPIO 1: Calcolare il determinante di

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[\text{Perm}=0]{IV-2I} \begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[IV-II]{III-2II} \begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{matrix} \xrightarrow[\text{Perm}=0]{IV-4III} \begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{matrix}$$

Perm=0   0

Poiché non sono state effettuate permutazioni (perm=0), il determinante originale coincide col prodotto degli elementi diagonali

$$1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 6 = -6$$

ESEMPIO 2: Calcolare $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{matrix} \xrightarrow[\text{Perm}=1]{II \leftrightarrow I} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \xrightarrow[\text{Perm}=1]{III-I} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow[\text{Perm}=1]{III-II} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ con una permutazione in tutto, da cui

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^1 \cdot 1 = -1$$

La tecnica funziona altrettanto bene per le matrici singolari. Applicando l'algoritmo di eliminazione ad una matrice singolare si otteniamo un numero di pivot inferiore al numero di colonne (e di righe) della matrice originale, e dunque gli elementi non nulli della matrice ridotta a scala sono tutti contenuti nel "triangolo superiore" e qualche elemento sulla diagonale è nullo, perché altrimenti i pivot sarebbero n. Ne segue che il prodotto degli elementi diagonali, e quindi il determinante, è nullo, il che accade se e solo se la matrice è singolare.