LIMITI DI FUNZIONI OMOGENEE.

(9/4/2020)

Queste brevi note sono dedicate ad un'integrazione di quanto esposto, in un altro contributo, a proposito delle funzioni omogenee di grado $\alpha>0$.
Si è già visto il

TEOREMA: Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$, Ω cono in $\mathbb{R}^n$ (con vertice nell'origine), omogenea di grado $\alpha>0$, che verifica quindi $f(tx)=t^\alpha f(x)$ $\forall x\in\Omega$ $\forall t>0$.
Allora, se f è limitata su $\Omega\cap\partial B(0,1)=$
$=\{x\in\Omega : |x|=1\}$ si ha $\lim_0 f(x)=0$.

Per completezza, riesponiamone la dimostrazione.

DIM. Dall'ipotesi di omogeneità risulta, $\forall x\in\Omega$, $x\neq 0$

$$f(x)=f\left(|x|\frac{x}{|x|}\right)=|x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

Per l'ipotesi di limitatezza di f su $\{x\in\Omega : |x|=1\}$ si ha che $\exists\ k>0 : |f(y)|\le k$ $\forall y\in\{x\in\Omega : |x|=1\}$
e dunque

$$0\le|f(x)|=|x|^\alpha\left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|\le k|x|^\alpha \quad \forall x\in\Omega,\ x\neq 0$$

da cui, infine, per il teorema del confronto, segue la tesi, in quanto $\alpha > 0$ e $|x|^\alpha \to 0$.

$\blacksquare$

È interessante notare che la condizione di limitatezza su $\Omega \cap \partial B(0,1)$ non è solo sufficiente per l'esistenza del limite: è anche necessaria! Ciò sarà stabilito nel seguente

TEOREMA: Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, α-omogenea con $\alpha > 0$ sul cono Ω, e sia inoltre convergente (a zero) per x che tende a 0.
Allora, f è limitata su $\Omega \cap \partial B(0,1)$.

DIM. Supponiamo per assurdo che f verifichi tutte le ipotesi, ma che non sia limitata su $\Omega \cap \partial B(0,1) = \{x \in \Omega : |x| = 1\}$.
Allora, per definizione di non limitatezza,

(*) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \Omega : |x_n| = 1$ e $|f(x_n)| > n$.

Ora f converge a 0 in 0 e, scelto $\bar{\varepsilon} = 1$, esiste $\bar{\delta} > 0 : x \in \Omega, |x| < \bar{\delta}, x \neq 0 \implies |f(x)| < \bar{\varepsilon} = 1$.

Si consideri allora la successione $y_n = \frac{\bar\delta}{2} x_n$.
Si ha $y_n \in \Omega$ perché Ω è un cono e $\frac{\bar\delta}{2} > 0$.
Si ha anche che $|y_n| = \frac{\bar\delta}{2} |x_n| = \frac{\bar\delta}{2} < \bar\delta$
Dall'ipotesi d'omogeneità e da $(*)$, segue poi

$$|f(y_n)| = \left|f\left(\frac{\bar\delta}{2} x_n\right)\right| = \left(\frac{\bar\delta}{2}\right)^\alpha |f(x_n)| > \left(\frac{\bar\delta}{2}\right)^\alpha n$$

Se si sceglie, infine, $\bar n > \left(\frac{2}{\bar\delta}\right)^\alpha$, si ha subito

$$|f(y_{\bar n})| > 1$$

e, poiché $|y_{\bar n}| < \bar\delta$, ciò contraddice la disuguaglianza di limite precedente.

$\blacksquare$

Dunque, la limitatezza su $\Omega \cap \partial B(0,1)$ è necessaria e sufficiente per la convergenza a 0 di f. Visto che ogni α-omogenea con $\alpha > 0$ tende comunque a zero sui raggi uscenti dall'origine, in quanto $h(t) = f(t\bar x) = t^\alpha f(\bar x)$, $\bar x$ fissato, ne segue che f non può avere altri (eventuali) limiti. Dunque: "f α-<u>omogenea</u>, $\alpha > 0$, è **infinitesima se e solo se è limitata su** $\operatorname{dom} f \cap \partial B(0,1)$"

NOTA: la verifica diretta della limitatezza di f comporta la risoluzione dell'equazione

$$|f(x)| = K$$

che, di regola, non può essere ottenuta esplicitamente. Poiché non è importante determinare K, un'eccellente scorciatoia per ottenerla a costo zero è (quando è possibile) di usare il teorema di Weierstrass. In effetti, se f è continua e se $\Omega \cap \partial B(0,1)$ è chiuso (poiché è di certo limitato essendo un sottinsieme di $\overline{B(0,1)}$) ne segue immediatamente la limitatezza applicandolo a $|f|$, continua, sul compatto $\Omega \cap \partial B(0,1)$. Esaminiamo due esempi illuminanti.

1) $$\lim_{(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

La funzione è continua sul suo dominio $\{y \neq -x\}$, che è un cono, ed è 1-omogenea. Naturalmente, occorre attendersi guai dalle parti di $y=-x$, ma supponiamo di restringere il dominio di

f al cono $\{x \geq 0, y \geq 0\}$: il primo quadrante completo di frontiera.
In tal caso, $(0,0)$ a parte, il denominatore non ha zeri in tale regione e quindi f è continua in ogni punto di $\{x \geq 0, y \geq 0\}$, salvo l'origine.
Ne segue che è continua sul compatto

$$\{x \geq 0, y \geq 0\} \cap \{x^2+y^2=1\}$$

e si può applicare il teorema di Weierstrass alla f su tale insieme, da cui segue subito la limitatezza di f, e il fatto che $f \to 0$ se $x \to 0$ nella regione $\{x \geq 0 \ y \geq 0\}$.

Cosa accade invece se si considera il dominio massimale di f (il suo campo di definizione)?
In tal caso, $\operatorname{dom} f \cap \partial B(0,1)$ è l'intera circonferenza unitaria privata dei due punti $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ dove essa interseca $y=-x$, su cui il denominatore si annulla. Per verificare che f NON è limitata

su $\{y \neq -x\} \cap \{x^2+y^2=1\} = \operatorname{dom} f \cap \partial B(0,1)$ e quindi, per il teorema appena provato, non è neppure infinitesimo al tendere di x a 0, basta osservare che ogni punto della circonferenza unitaria può scriversi nella forma $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ e che $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \dfrac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}$. Poiché

$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{4}} \left| \frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi} \right| = +\infty$$

ne segue subito la tesi. Osserviamo, inoltre, che in tal caso $\operatorname{dom} f \cap \partial B(0,1)$ NON è chiuso perché i punti prima individuati sono suoi punti di frontiera che non gli appartengono. Ciò, di per sé, non vorrebbe dire nulla, perché la compattezza è, con la continuità, sufficiente per la limitatezza e NON necessaria. È però un fatto che $f(x) = x$ su $]0,1[$ non ha punti estremi, pur essendo limitata, ma $f(x) = \dfrac{1}{x}$, sullo stesso intervallo aperto, non ha punti estremi, né massimo né minimo, e NON è limitata. Naturalmente, fa molto comodo conoscere come sia fatto il luogo degli zeri del denominatore: nel caso dei polinomi, questo è il problema centrale della Geometria Algebrica. E sarebbe altrettanto comodo semplificare gli eventuali fattori comuni al numeratore ed al denominatore, e ciò è stato uno dei problemi importanti della Computer Algebra. Purtroppo, il vecchio algoritmo di Euclide per il massimo divisore comune, che si generalizza senza pena ai polinomi di una (sola) variabile è enormemente più complesso, matematicamente e computazionalmente, nel caso di polinomi di più variabili. Per saperne di più, chiedere in giro di: "Basi di Gröbner".