DETERMINAZIONE DI UN'APPLICAZIONE DI AUTOVETTORI ED AUTOVALORI DATI

Supponiamo di fissare una base $u_1 \dots u_n$ di $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) e di voler costruire un'applicazione lineare (definita dalla matrice associata alla base canonica, che ha per colonne le immagini mediante l'applicazione della base stessa) in modo che $u_1, u_2 \dots u_n$ siano autovettori formanti una base spettrale della applicazione, relativi ad autovalori dati anch'essi. Ad esempio

"**Determinare la matrice associata alla base canonica dell'applicazione A per la quale:**

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

".

Dunque, sappiamo che $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore 2 e $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ è relativo all'autovalore 1.

Esistono applicazioni che fanno ciò, e qual'è la loro matrice associata?

Poiché $u_1 \dots u_n$ è una base spettrale, l'eventuale applicazione $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dovrà essere diagonalizzabile e, dette

$$M = (u_1 \dots u_n)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dovrà verificarsi che $\quad M^{-1} A M = \Lambda$

Poiché conosciamo Λ, che ha sulla diagonale gli autovalori, M, che ha per colonne (indipendenti) gli autovettori, ed M^{-1}, che esiste perché M ha le colonne indipendenti, ricaviamo A moltiplicando l'uguaglianza precedente a sinistra per M e a destra per M^{-1}, da cui

$$(MM^{-1}) A (MM^{-1}) = M \Lambda M^{-1}$$

e cioè

$$A = M \Lambda M^{-1}$$

La matrice A così ottenuta è quella richiesta, esiste per la regolarità di M, ed è unica perché deve verificare la formula precedente.

Prima di dare un esempio, osserviamo che i prodotti $M\Lambda$ o ΛM^{-1}, uno almeno dei quali dovrà essere eseguito per prima cosa, hanno una struttura particolare molto semplice, sotto il profilo della complessità del calcolo. Infatti

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 m_{11} & \lambda_2 m_{12} & \dots & \lambda_n m_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 m_{n1} & \lambda_2 m_{n2} & \dots & \lambda_n m_{nn} \end{pmatrix}$$

e dunque, senza fare tanti conti, basta moltiplicare ogni colonna i-esima per il corrispondente autovalore λ_i, di posto (i,i) nella matrice Λ. Analogamente

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 m_{11} & \lambda_1 m_{12} & \cdots & \lambda_1 m_{1n} \\ & & & \\ \lambda_n m_{n1} & \lambda_n m_{n2} & \cdots & \lambda_n m_{nn} \end{pmatrix}$$

e dunque si fa come prima, ma moltiplicando per gli autovalori le righe, invece delle colonne.

Risolviamo, a titolo d'esempio, il problema posto all'inizio.

$$\lambda_1 = 2 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 1 \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e, per prima cosa, determiniamo M^{-1}

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{II-I} \left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{I-II}$$

$$\xrightarrow{I-II} \left.\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

da cui

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dovendo ora calcolare $M \Lambda M^{-1}$, e cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

osserviamo che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

ottenuta moltiplicando la prima colonna per il primo autovalore 2 e la seconda per il secondo autovalore sulla diagonale, 1.

Allora

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{/\!/}$

L'osservazione già fatta sul prodotto per matrici diagonali offre l'opportunità per un'ulteriore semplificazione: la matrice

$$M\Lambda \equiv \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ha come colonne le colonne di M, e cioè gli autovettori di A, già noti dall'inizio, per i corrispondenti autovalori, anch'essi noti.

Dunque la matrice A può essere scritta più semplicemente come

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n \end{pmatrix} M^{-1}$$

o anche

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^{-1}$$

ed i calcoli necessari si riducono a quelli per l'inversa di $(u_1 \cdots u_n)$ e per un solo prodotto di matrici.