# Capitolo 2

# Richiami di algebra lineare

## 2.1 Matrici e vettori

Con $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ si intende una *matrice* di $m$ righe e $n$ colonne formate da $m \times n$ numeri complessi $a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, detti *elementi* di $A$. Ogni elemento $a_{ij}$ è individuato dall'indice di riga $i$ e dall'indice di colonna $j$. Comunemente si scrive

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Gli interi $m$ ed $n$ si dicono le *dimensioni* di $A$.

Se $m = n$ la matrice $A$ si dice *quadrata di ordine* $n$; in tal caso gli elementi $a_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, si dicono *elementi diagonali* o appartenenti alla *diagonale principale* di $A$.

Se $m \neq n$ la matrice $A$ dicesi *rettangolare*.

Con $a \in \mathbb{C}^m$ si intende un *vettore* con $m$ componenti complesse indicate come $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. I vettori sono particolari matrici con una sola colonna, potendosi identificare $\mathbb{C}^{m\times 1}$ con $\mathbb{C}^m$.

Se $A$ ha tutti gli elementi reali è detta matrice reale e si suole scrivere $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$; analogamente con $a \in \mathbb{R}^m$ si intende un vettore a componenti reali.

Data la matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, la matrice $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ i cui elementi sono $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, si dice matrice *trasposta* della matrice $A$ e si indica con $A^T$ mentre si dice matrice *trasposta coniugata* di $A$ la matrice $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ i cui elementi sono $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$ e si indica con $A^H$.

La matrice quadrata

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

dicesi *matrice identica* o *matrice unità* .

Si dice *matrice diagonale* una matrice quadrata $D$ con gli elementi non diagonali nulli, cioè della forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix};$$

si scrive anche $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Le matrici quadrate del tipo

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix},$$

si dicono *matrici triangolari* e precisamente $L$ dicesi *triangolare inferiore* e $R$ *triangolare superiore.*

## 2.2 Operazioni tra matrici

Date $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, la matrice somma, $C = A + B$, è definita ponendo

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Valgono, per l'addizione, le proprietà associativa e commutativa.

Se $A \in \mathbb{C}^{m\times k}$ e $B \in \mathbb{C}^{k\times n}$, la matrice prodotto $C = AB$, si definisce ponendo

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

e risulta quindi $C \in \mathcal{C}^{m\times n}$.

Per la moltiplicazione vale la proprietà associativa e la proprietà distributiva rispetto alla addizione.

È importante osservare che la moltiplicazione non gode della proprietà commutativa, né della legge di annullamento del prodotto; infatti in generale è $AB \neq BA$, mentre il prodotto $AB$ può essere uguale alla matrice nulla senza che né $A$ né $B$ siano nulle (cfr. Esempio 2.11.1).

Per questo motivo, quando si moltiplica una matrice $A$ per una matrice $B$ occorre distinguere tra *premoltiplicazione* quando $B$ moltiplica $A$ a sinistra ($BA$) e *postmoltiplicazione* quando $B$ moltiplica $A$ a destra ($AB$).

Per la trasposta e la trasposta coniugata del prodotto di due matrici si ha

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{e} \quad (AB)^H = B^H A^H .$$

Il prodotto $a^H b = \sum_{l=1}^{n} \overline{a}_l b_l$ di due vettori $a, b \in \mathcal{C}^n$ è detto *prodotto scalare* e se $a^H b = 0$ i due vettori si dicono *ortogonali.*

Infine la moltiplicazione di un numero $\alpha$ per una matrice (per un vettore) si esegue moltiplicando per $\alpha$ tutti gli elementi della matrice (del vettore).

**Definizione 2.2.1** *$k$ vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)} \in \mathcal{C}^{\,m}$ si dicono* linearmente indipendenti *se*

$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_k v^{(k)} = 0 \, ,$$

*con $\alpha_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, implica*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \, .$$

## 2.3 Determinante e inversa

**Definizione 2.3.1** *Si dice* determinante *di una matrice $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ il numero*

$$\det(A) = \sum_P s(\pi) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

*dove $\pi$ è la permutazione $(j_1, j_2, .., j_n)$ dei numeri $(1, 2, .., n)$, la funzione $s(\pi)$ vale 1 se la permutazione $\pi$ è di classe pari o $-1$ se la permutazione $\pi$ è di classe dispari e $P$ è l'insieme delle $n!$ permutazioni $\pi$ possibili.*

Per il calcolo del determinante di una matrice $A$ si può fare uso del *primo teorema di Laplace*

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) & \\ \quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) & \text{se } n > 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $A_{ij}$ è la sottomatrice ottenuta da $A$ eliminando la riga $i$-esima e la colonna $j$-esima.

Vale anche il *secondo teorema di Laplace*

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{rj}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{is}) = 0$$

per $r \neq i$ e $s \neq j$.

Nel caso di una matrice diagonale o triangolare si ha immediatamente

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Il determinante della matrice $A$ si indica anche con la notazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dalla (2.1) segue anche, per induzione, $\det(A) = \det(A^T)$.

**Definizione 2.3.2** *Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice* singolare *(*non singolare*) se* $\det(A) = 0$ *(*$\det(A) \neq 0$*).*

**Definizione 2.3.3** *Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ed un intero $k \leq \min\{m, n\}$ si dice* minore di ordine *$k$ il determinante di una matrice ottenuta da $A$ prendendo tutti gli elementi sulla intersezione di $k$ righe e $k$ colonne comunque fissate.*

**Definizione 2.3.4** *Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dicono* minori principali di ordine *$k$ i determinanti delle sottomatrici di ordine $k$ estratte da $A$ e aventi diagonale principale composta da elementi della diagonale principale di $A$.*

**Definizione 2.3.5** *Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice* minore principale di testa di ordine *$k$ il determinante della sottomatrice di ordine $k$ formata dalle prime $k$ righe e $k$ colonne di $A$.*

**Definizione 2.3.6** *Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ si dice* rango *o* caratteristica *della matrice $A$ il numero $r(A)$ pari all'ordine più alto dei suoi minori diversi da zero.*

**Teorema 2.3.1** (di Binet-Cauchy) *Date $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, il determinante della matrice prodotto $C = AB \in \mathbb{C}^{m \times m}$ è nullo se $m > n$; altrimenti è dato dalla somma dei prodotti di tutti i possibili minori di ordine massimo di $A$ per i corrispondenti minori di $B$.*[1]

**Corollario 2.3.1** *Dal Teorema 2.3.1 segue, se $m = n$,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

**Definizione 2.3.7** *Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolare si dice* matrice inversa *di $A$ la matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}\,.$$

Da questa definizione e dai teoremi di Laplace segue

$$AB = BA = I.$$

In seguito, indicheremo con il simbolo $A^{-1}$ la matrice inversa della matrice $A$.

Dal Corollario 2.3.1 si ha

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1\,,$$

per cui il determinante di una matrice $A$ è il reciproco del determinante della sua inversa.

Dalla Definizione 2.3.7 segue che una matrice $A$ singolare non ammette matrice inversa.

[1] Un minore di ordine massimo di $A$, nel caso $m \leq n$, è il determinante della matrice formata da $m$ colonne di $A$ di indici $k_1, k_2, \ldots, k_m$ comunque fissati; il corrispondente minore di $B$ è il determinante della matrice formata da $m$ righe di $B$ di indici $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

## 2.4 Matrici particolari

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice

| | | |
|---|---|---|
| *hermitiana* | se | $A = A^H$; |
| *antihermitiana* | se | $A = -A^H$; |
| *unitaria* | se | $A^H A = AA^H = I$; |
| *normale* | se | $A^H A = AA^H$ ; |
| *simmetrica* | se | $A = A^T$; |
| *antisimmetrica* | se | $A = -A^T$. |

In particolare, nel campo reale, una matrice hermitiana è anche simmetrica, mentre una matrice unitaria è detta anche *ortogonale*.

Le matrici unitarie hanno come inversa la loro trasposta coniugata e le matrici ortogonali hanno come inversa la loro trasposta.

Data una matrice hermitiana $A$ ed un vettore $x \in \mathbb{C}^n$, lo scalare $x^H Ax$ è un numero reale in quanto

$$(x^H Ax)^H = x^H A^H x = x^H Ax;$$

la matrice $A$ si dice *definita positiva (negativa)* se $x^H Ax > 0$ $(< 0)$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$ con $x \neq 0$, mentre è detta *semidefinita positiva (negativa)* se $x^H Ax \geq 0$ $(\leq 0)$.

**Teorema 2.4.1** *Una matrice hermitiana è definita positiva se e solo se i suoi minori principali di testa sono tutti positivi.*

**Definizione 2.4.1** *Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è detta matrice di* permutazione *se è ottenuta dalla matrice identica operando su di essa una permutazione delle colonne (delle righe).*

Una matrice di permutazione è una matrice ortogonale, avendosi $P^T P = PP^T = I$.

Il prodotto di una matrice $A$ per una matrice di permutazione $P$ produce su $A$ una permutazione delle colonne o delle righe; precisamente:

$AP$ presenta, rispetto ad $A$, la stessa permutazione di colonne che si è operata su $I$ per ottenere $P$;

$PA$ presenta, rispetto ad $A$, la stessa permutazione di righe che si è operata su $I$ per ottenere $P$.

Si noti che se $P$ si ottiene permutando le colonne di $I$, allora $P^T$ si ottiene con la stessa permutazione delle righe di $I$.

**Definizione 2.4.2** *Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice a* predominanza diagonale forte *se*

$$| a_{ii} | > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} | a_{ij} |, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

**Definizione 2.4.3** *Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice a* predominanza diagonale debole *se*

$$| a_{ii} | \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} | a_{ij} |, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

*e per almeno un indice $r$, $1 \leq r \leq n$, si ha*

$$| a_{rr} | > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n} | a_{rj} | .$$

**Definizione 2.4.4** *Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice* convergente *se*

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \mathbf{O}$$

*dove* $\mathbf{O}$ *è la matrice nulla.*

## 2.5 Sistemi lineari

Dati una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ed un vettore $b \in \mathbb{C}^n$, un sistema di $n$ equazioni lineari in $n$ incognite si può rappresentare nella forma (cfr. 3.1)

$$Ax = b \tag{2.2}$$

dove $x \in \mathbb{C}^n$ è il vettore delle incognite.

Sulla risolubilità del sistema (2.2) si ha il seguente teorema.

**Teorema 2.5.1** (di Rouché - Capelli) *Il sistema lineare (2.2) ammette soluzione se e solo se*

$$r(A) = r(A \mid b),$$

*dove con $(A \mid b)$ è indicata la matrice completa del sistema costituita da $n$ righe ed $n+1$ colonne. Se $r(A) = n$ la soluzione è unica mentre se $r(A) < n$ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ di dimensione $n - r(A)$.*

Se $\det(A) \neq 0$, il sistema (2.2) si dice *normale*. In tal caso la soluzione è data formalmente da $x = A^{-1}b$ e può essere espressa mediante la *regola di Cramer*

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

essendo $A_i$ la matrice ottenuta da $A$ sostituendo la $i$-esima colonna con il vettore $b$.

Nel caso particolare $b = 0$ il sistema (2.2) si dice *omogeneo* ed ha sicuramente soluzioni, avendosi $r(A) = r(A \mid b)$; se è anche $\det(A) \neq 0$ l'unica soluzione è $x = 0$. Ne segue che un sistema omogeneo ha soluzioni non nulle allora e solo che sia $\det(A) = 0$.

## 2.6 Matrici partizionate, matrici riducibili

Nelle applicazioni si incontrano spesso matrici $A$ *partizionate a blocchi* e cioè matrici i cui elementi sono sottomatrici di $A$.

Una qualunque matrice può essere partizionata a blocchi in molti modi; è importante il caso in cui i blocchi diagonali sono quadrati [2].

Come per le matrici scritte ad elementi, anche per le matrici partizionate a blocchi si possono avere matrici *triangolari a blocchi*, cioè aventi una delle seguenti forme

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ \mathbf{O} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix},$$

o *diagonali a blocchi*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_{22} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}.$$

In questi casi particolari è facile verificare che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_{ii}).$$

[2] Ciò comporta che la matrice $A$ sia quadrata.

**Definizione 2.6.1** *Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice* riducibile *se esiste una matrice di permutazione $P$ tale che la matrice $P^TAP$ sia della forma*

$$B = P^TAP = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{O} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

*con blocchi diagonali quadrati.*

Nel caso in cui $B$ contenga qualche blocco diagonale ancora riducibile si può operare una nuova trasformazione con un'altra matrice di permutazione e così via fino ad arrivare alla *forma ridotta* della matrice $A$ in cui tutti i blocchi diagonali risultano non riducibili.

Una matrice che non sia riducibile è detta *irriducibile*.

Da quanto visto in 2.4, la matrice $B$ si ottiene dalla matrice $A$ operando sulle righe e sulle colonne la stessa permutazione operata sulle colonne di $I$ per ottenere $P$.

Per stabilire se una matrice è riducibile o meno, cioè se esiste o no una matrice $P$ che verifichi la Definizione 2.6.1, servono le definizioni ed il teorema seguenti.

**Definizione 2.6.2** *Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, fissati $n$ punti, detti* nodi, *$N_1, N_2, \ldots, N_n$, si dice* grafo orientato *associato ad $A$, il grafo che si ottiene congiungendo $N_i$ a $N_j$ con un cammino orientato da $N_i$ a $N_j$ per ogni $a_{ij} \neq 0$.*

**Definizione 2.6.3** *Un grafo orientato si dice* fortemente connesso *se da ogni nodo $N_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, è possibile raggiungere un qualunque altro nodo $N_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, seguendo un cammino orientato eventualmente passante per altri nodi.*

**Teorema 2.6.1** *Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è irriducibile se e solo se il grafo orientato ad essa associato risulta fortemente connesso.*

(cfr. Esempi 2.11.3 e 2.11.4)

Se $A$ è riducibile, per costruire $P$ si procede come nell'Esempio 2.11.5.

## 2.7 Autovalori e autovettori

**Definizione 2.7.1** *Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice* autovalore *di $A$ ogni numero $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che il sistema lineare*

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{C}^n, \tag{2.3}$$

*abbia soluzioni $x \neq 0$; ogni tale vettore $x$ è detto* autovettore destro *associato all'autovalore $\lambda$, intendendo che $x$ ed ogni vettore $kx$ ($k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$) rappresentano lo stesso autovettore.*

In analogia è detto *autovettore sinistro* un vettore $y \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$y^T A = \lambda y^T.$$

Trasponendo entrambi i membri della (2.3) si ha

$$x^T A^T = \lambda x^T$$

da cui risulta che gli autovettori destri di $A$ sono gli autovettori sinistri di $A^T$ associati allo stesso autovalore.

Come si è visto, dal teorema di Rouché -Capelli, un sistema lineare omogeneo ha soluzioni non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti del sistema è singolare e cioè ha determinante nullo; poiché il sistema (2.3) è equivalente al sistema omogeneo

$$(A - \lambda I)x = 0\,,$$

ne segue che gli autovalori di $A$ sono tutti e soli i numeri $\lambda$ che soddisfano l'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2.4}$$

Essendo $\det(A - \lambda I) = \det[(A - \lambda I)^T] = \det(A^T - \lambda I)$ segue che $A$ e $A^T$ hanno gli stessi autovalori.

Dal calcolo di $\det(A - \lambda I)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) \;&=\; (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}\sigma_1 \lambda^{n-1} + \\ &\quad (-1)^{n-2}\sigma_2 \lambda^{n-2} + \cdots - \sigma_{n-1}\lambda + \sigma_n, \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove i coefficienti $\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sono, ciascuno, la somma dei minori principali di ordine $i$ estratti dalla matrice $A$.

In particolare risulta $\sigma_1 = \sum_{j=1}^n a_{jj}$, e $\sigma_n = \det(A)$. $\sigma_1$ si dice *traccia* di $A$ e si indica col simbolo $tr(A)$.

Il polinomio (2.5) è detto *polinomio caratteristico* della matrice $A$ mentre l'equazione (2.4) prende il nome di *equazione caratteristica*.

Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ coincidono con le radici dell'equazione caratteristica, perciò sono $n$ e verranno indicati con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

**Osservazione 2.7.1** Dalle (2.4) e (2.5) si deducono le proprietà:

$\lambda = 0$ è autovalore di $A \Longleftrightarrow \det(A) = 0$;

la somma degli autovalori coincide con $\sigma_1$ (cfr. le (4.50)) e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A)\ ; \tag{2.6}$$

il prodotto degli autovalori coincide con $\sigma_n$ (cfr. le (4.50)) e quindi

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A). \tag{2.7}$$

**Definizione 2.7.2** *Si dice* raggio spettrale *della matrice $A$ il numero reale non negativo*

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} \mid \lambda_i \mid\ .$$

**Teorema 2.7.1** *Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è convergente se e solo se il suo raggio spettrale è minore di 1.*

**Definizione 2.7.3** *Data una matrice $A$ ed una matrice $S$ non singolare, si dice* trasformata per similitudine *della matrice $A$, la matrice $B$ tale che*

$$B = S^{-1}AS;$$

*le matrici $A$ e $B$ si dicono* simili.

Si verifica subito che la relazione di similitudine è riflessiva, simmetrica e transitiva.

**Teorema 2.7.2** *Due matrici simili $A$ e $B$ hanno gli stessi autovalori. Inoltre, per ogni autovalore $\lambda$, se $x$ è autovettore di $A$, allora $S^{-1}x$ è autovettore di $B$.*

Dimostrazione. Per ottenere la prima parte della tesi basta verificare che due matrici simili $A$ e $B$ hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Si ha infatti

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I) &= \det(S^{-1}AS-\lambda I)=\det(S^{-1}AS-\lambda S^{-1}S)\\ &= \det[S^{-1}(A-\lambda I)S]\\ &= \det(S^{-1})\det(A-\lambda I)\det(S)\\ &= \det(A-\lambda I).\end{aligned}$$

Per provare la seconda parte si osservi che da $Ax=\lambda x$ segue $(S^{-1}AS)S^{-1}x=\lambda S^{-1}x$. □

**Teorema 2.7.3** *Se $A$ possiede l'autovalore $\lambda$ e $k\in\mathbb{N}$, $A^k$ possiede l'autovalore $\lambda^k$ e gli autovettori di $A$ sono anche autovettori di $A^k$.*

Questo teorema, se $A$ è non singolare, vale anche per $k\in\mathbb{Z}$.

**Teorema 2.7.4** *Gli autovalori di una matrice hermitiana sono tutti reali.*

Dimostrazione. Sia $\lambda$ un autovalore di $A$. Dalla uguaglianza $Ax=\lambda x$, si ottiene, premoltiplicando per $x^H$, $x^HAx=\lambda x^Hx$ ed ancora, dividendo per il numero reale e positivo $x^Hx$ (si ricordi che $x\neq 0$),

$$\lambda=\frac{x^HAx}{x^Hx}. \tag{2.8}$$

Nel secondo membro della (2.8) il numeratore è reale per quanto visto all'inizio di 2.4: ne segue la tesi. □

**Definizione 2.7.4** *Dicesi* molteplicità algebrica *di un autovalore $\lambda$, la molteplicità di $\lambda$ come radice dell'equazione caratteristica.*

La molteplicità algebrica di $\lambda$ sarà indicata con $\alpha(\lambda)$.

**Definizione 2.7.5** *Dicesi* molteplicità geometrica *di $\lambda$, e si indicherà con $\gamma(\lambda)$, la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-\lambda I)x=0$.*

Si osservi che la molteplicità geometrica così definita corrisponde al numero di autovettori, tra loro linearmente indipendenti, associati all'autovalore $\lambda$ e si ha (cfr. Teorema 2.5.1) $\gamma(\lambda)=n-r(A-\lambda I)$.

**Teorema 2.7.5** *Per ogni autovalore* $\lambda$ *risulta*

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq n\,.$$

**Teorema 2.7.6** (traslazione di spettro) *Sia* $\lambda$ *autovalore di* $A$ *e* $q \in \mathbb{C}$*; allora* $B = A + qI$ *ha come autovalore* $\lambda + q$ *con molteplicità algebrica e geometrica pari a quelle di* $\lambda$*; inoltre* $B$ *ha gli stessi autovettori di* $A$.

**Teorema 2.7.7** *Se* $\lambda_i$ *e* $\lambda_j$ *sono autovalori distinti gli autovettori ad essi associati sono linearmente indipendenti.*

Ne segue che se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ possiede $n$ autovalori distinti, $A$ ammette $n$ autovettori linearmente indipendenti.

**Definizione 2.7.6** *Una matrice* $A$ *si dice* diagonalizzabile *se esiste una matrice* $X$ *non singolare tale che*

$$X^{-1}AX = D \tag{2.9}$$

*con* $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Una matrice $X$ che verifica la (2.9) è tale che le sue colonne $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ sono autovettori linearmente indipendenti di $A$; infatti,

$$AX = XD$$

da cui segue $Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Teorema 2.7.8** *Una matrice* $A$ *è normale se e solo se esiste una matrice* $X$ *unitaria per cui valga la (2.9).*

**Teorema 2.7.9** (di Jordan) *Ogni matrice* $A$*, di ordine* $n$*, avente* $k \leq n$ *autovalori distinti,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$*, è simile ad una matrice diagonale a* $k$ *blocchi, cioè esiste una matrice* $H$ *non singolare tale che*

$$H^{-1}AH = J = diag(J^{(1)}, J^{(2)}, \ldots, J^{(k)}) \tag{2.10}$$

*dove ogni blocco diagonale* $J^{(i)}$ *è di ordine* $\alpha(\lambda_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots, k$*, ed è anch'esso di forma diagonale a blocchi, avendosi*

$$J^{(i)} = diag(J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \ldots, J_{\gamma(\lambda_i)}^{(i)})\,;$$

*ciascun blocco* $J_l^{(i)}$*, detto anche* blocco di Jordan*, è della forma*

$$J_l^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, \ldots, \gamma(\lambda_i).$$

Si noti che, se $p_l^{(i)}$ è l'ordine di $J_l^{(i)}$, risulta

$$\sum_{l=1}^{\gamma(\lambda_i)} p_l^{(i)} = \alpha(\lambda_i)\,. \tag{2.11}$$

La matrice (2.10) si dice *forma canonica di Jordan* della matrice $A$. Il polinomio caratteristico del blocco di Jordan $J_l^{(i)}$ è $\det(J_l^{(i)} - \lambda I) = (\lambda_i - \lambda)^{p_l^{(i)}}$, e si dice un *divisore elementare* di $A$.

Si osservi che il numero dei blocchi di Jordan di una matrice $A$ corrisponde al numero di autovettori linearmente indipendenti di $A$.

Le matrici diagonalizzabili costituiscono un caso particolare in cui i blocchi di Jordan sono tutti di ordine 1, cioè i divisori elementari sono tutti lineari: in tal caso le colonne di $H$ sono gli autovettori di $A$.

Dal teorema di Jordan, e in particolare dalla (2.11), discende il seguente teorema.

**Teorema 2.7.10** *Una matrice è diagonalizzabile se e solo se per ogni suo autovalore* $\lambda$ *si ha* $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$.

## 2.8 Localizzazione degli autovalori

**Teorema 2.8.1** (primo teorema di Gershgorin) *Sia* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, si indichino con* $\mathcal{F}_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, gli insiemi*

$$\mathcal{F}_i = \{z \in \mathbb{C} \mid\, \mid z - a_{ii} \mid \le \rho_i\}, \quad \text{con} \quad \rho_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \mid a_{ij} \mid; \tag{2.12}$$

*allora se* $\lambda$ *è autovalore di* $A$ *si ha*

$$\lambda \in \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Indicando con $x$ un autovettore destro associato all'autovalore $\lambda$, sia $x_k$ la sua componente di massimo modulo; dalla riga $k$-esima della (2.3) si ha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = \lambda x_k$$

da cui

$$(\lambda - a_{kk})x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j \ .$$

Passando ai moduli dei due membri e maggiorando nel secondo membro ogni $| x_j |$ con $| x_k |$, si ottiene

$$| \lambda - a_{kk} || x_k | \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} | a_{kj} || x_k |$$

ed essendo, per la definizione di autovettore, $x_k \neq 0$, si ha

$$| \lambda - a_{kk} | \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} | a_{kj} | = \rho_k$$

che prova la tesi. □

Il Teorema 2.8.1 ha una evidente interpretazione grafica: ciascun insieme $\mathcal{F}_i$ di (2.12) è, nel piano complesso, un cerchio di centro il punto $a_{ii}$ e raggio $\rho_i$; l'insieme $\mathcal{F}$ a cui appartengono tutti gli autovalori di $A$ è quindi l'unione dei cerchi $\mathcal{F}_i$, detti anche *cerchi di Gershgorin.*

**Teorema 2.8.2** (secondo teorema di Gershgorin) *Se $M_1$ è l'unione di $k$ cerchi di Gershgorin e $M_2$ è l'unione dei rimanenti $n-k$ ed è $M_1 \bigcap M_2 = \emptyset$, allora $k$ autovalori appartengono a $M_1$ e $n-k$ a $M_2$.*

**Teorema 2.8.3** (terzo teorema di Gershgorin) *Sia $A$ irriducibile; se un autovalore appartiene alla frontiera dell'unione dei cerchi di Gershgorin esso appartiene alla frontiera di tutti i cerchi costituenti l'insieme $\mathcal{F}$.*

Per la localizzazione degli autovalori di una matrice è utile anche il Corollario 2.10.2.

## 2.9 Valori singolari

Particolare importanza in alcune applicazioni (cfr. 6.8.5) ha il seguente teorema.

**Teorema 2.9.1** *Qualunque sia $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, con $m \geq n$, esistono due matrici unitarie $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ e $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tali che*

$$A = U\Sigma V^H \tag{2.13}$$

*con $\Sigma = \begin{pmatrix} D \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}$, $\mathbf{O}$ la matrice nulla, $D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e*

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0.$$

La (2.13) è detta *decomposizione ai valori singolari* della matrice $A$, la matrice $\Sigma$ è univocamente determinata (non così le matrici $U$ e $V$) ed i numeri $\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, si dicono i *valori singolari* della matrice $A$. Si può verificare che il numero dei valori singolari non nulli è uguale a $r(A)$, le colonne di $U$ sono autovettori di $AA^H$, mentre quelle di $V$ sono autovettori di $A^HA$.

**Teorema 2.9.2** *Sia $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$; i quadrati dei valori singolari di $A$ sono autovalori della matrice $A^HA \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

**Teorema 2.9.3** *Se $A$ è una matrice normale di ordine $n$ si ha*

$$\sigma_i = \mid \lambda_i \mid, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

*dove i numeri $\lambda_i$ sono gli autovalori della matrice $A$.*

## 2.10 Norme

Spesso è necessario confrontare fra loro due vettori o due matrici; a tale scopo è utile il concetto di norma.

### 2.10.1 Norme vettoriali

**Definizione 2.10.1** *Si dice* norma vettoriale*, e si indica con* $\|x\|$*, una funzione, definita nello spazio vettoriale* $\mathbb{C}^n$*, a valori reali non negativi, che verifica le seguenti condizioni:*

$$\begin{array}{ll}\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0\,; & \\ \|\alpha x\| = \mid \alpha \mid \|x\|\,, & \forall x \in \mathbb{C}^n,\ \forall \alpha \in \mathbb{C}\ ; \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,, & \forall x, y \in \mathbb{C}^n\ .\end{array}$$

In $\mathbb{C}^n$ è possibile definire norme in modo arbitrario ma le più usate sono le seguenti:

$$\begin{array}{ll}\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \mid x_i \mid, & \textit{norma 1}; \\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^2}, & \textit{norma 2} \text{ o } \textit{norma euclidea}; \\ \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \mid x_i \mid, & \textit{norma } \infty.\end{array}$$

In Fig. 2.1 è riportato l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\},$$

detto *sfera unitaria* di $\mathbb{R}^2$, per le tre norme definite.

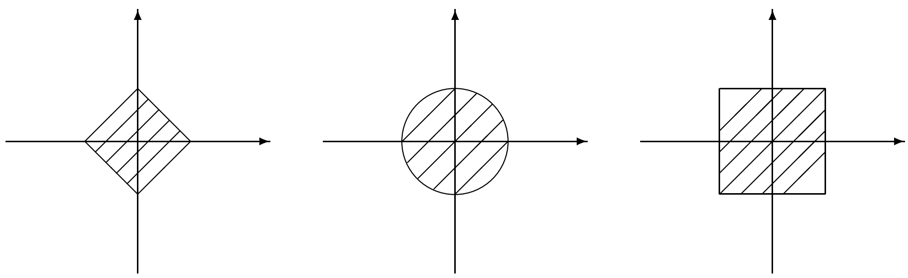

Figura 2.1: Sfere unitarie per le norme 1,2,$\infty$.

**Teorema 2.10.1** *Ogni norma vettoriale è uniformemente continua su* $\mathbb{C}^n$*.*

**Teorema 2.10.2** (equivalenza tra norme) *Date due norme vettoriali* $\|x\|_p$ *e* $\|x\|_q$*, esistono due costanti reali e positive* $\alpha$ *e* $\beta$ *tali che*

$$\alpha\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \beta\|x\|_p, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n. \tag{2.14}$$

Il senso dell'equivalenza fra due norme appare evidente nello studio del comportamento di una successione di vettori: in virtù della (2.14) il carattere della successione è lo stesso in entrambe le norme.

Per le norme qui definite valgono le relazioni:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \ ;$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \ ;$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \ .$$

### 2.10.2 Norme matriciali

**Definizione 2.10.2** *Si dice* norma matriciale*, e si indica con* $\|A\|$*, una funzione, definita in* $\mathbb{C}^{n\times n}$*, a valori reali non negativi, che verifica le seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned}
&\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = \mathbf{O} \ ;\\
&\|\alpha A\| = \mid \alpha \mid \|A\| \ , \qquad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \ ;\\
&\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \ , \qquad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n} \ ;\\
&\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \ , \qquad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n} \ .
\end{aligned}$$

Si possono costruire norme matriciali facendo ricorso alle norme vettoriali definendo

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|};$$

in questo caso la norma matriciale si dice *naturale* o *indotta* dalla norma vettoriale considerata.

Una norma matriciale si dice *coerente* o *compatibile* con una norma vettoriale se si ha

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Le norme naturali sono coerenti con le rispettive norme vettoriali.

Si può dimostrare che le norme matriciali indotte dalle tre norme vettoriali definite in 2.10.1 sono le seguenti:

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n \mid a_{ij} \mid$, *norma 1*;
$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$, *norma 2* o *norma euclidea*;
$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n \mid a_{ij} \mid$, *norma* $\infty$.

Un esempio di norma matriciale non indotta è dato dalla *norma matriciale di Frobenius* definita come

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mid a_{ij} \mid^2} \; ;$$

essa non è indotta da alcuna norma vettoriale in quanto risulta $\|I\|_F = \sqrt{n}$ mentre è $\|I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = 1$ qualunque sia la norma vettoriale considerata.

**Teorema 2.10.3** *Sia* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*; per ogni norma matriciale indotta vale la relazione*

$$\rho(A) \leq \|A\| \, .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\lambda$ un autovalore di $A$; quindi si ha $Ax = \lambda x$ con $x$ autovettore destro associato a $\lambda$. Prendendo una qualunque norma dei due membri si ottiene

$$\mid \lambda \mid \|x\| = \|Ax\| \, ,$$

da cui, se si usa la norma matriciale indotta da quella vettoriale,

$$\mid \lambda \mid \|x\| \leq \|A\| \|x\| \, .$$

Essendo $x \neq 0$, dividendo per $\|x\|$, si ha

$$\mid \lambda \mid \leq \|A\| \, .$$

Poiché $\lambda$ è un qualunque autovalore di $A$, la relazione precedente è valida anche per l'autovalore il cui modulo coincide con $\rho(A)$, da cui la tesi. □

**Corollario 2.10.1** *Affinché una matrice sia convergente è sufficiente che una sua norma indotta risulti minore di 1.*

Un esempio in cui vale la relazione $\rho(A) = \|A\|$ è dato dalle matrici hermitiane; infatti si ha

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A)\ .$$

**Corollario 2.10.2** *Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, gli autovalori di $A$ appartengono al cerchio*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid\, |\, z\, | \leq \|A\|\}\ ,$$

*dove $\|\cdot\|$ è una qualunque norma indotta.*

## 2.11 Complementi ed esempi

### 2.11.1 Prodotto di due matrici

Il seguente esempio mostra che l'operazione di moltiplicazione tra matrici non gode della proprietà commutativa e che non vale la legge di annullamento del prodotto.

**Esempio 2.11.1** Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

### 2.11.2 Matrici definite e semidefinite

**Teorema 2.11.1** *Le matrici hermitiane e definite positive (negative) hanno autovalori positivi (negativi) e viceversa.*

La dimostrazione della parte diretta del teorema risulta evidente ricorrendo alla (2.8).

**Teorema 2.11.2** *Le matrici hermitiane e semidefinite positive (negative) hanno autovalori non negativi (non positivi) e viceversa.*

**Esempio 2.11.2** Sia $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La matrice $B = A^H A$ risulta hermitiana essendo

$$B^H = (A^H A)^H = A^H A = B\,.$$

Il numero $x^H Bx$, con $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, è dato da

$$x^H Bx = x^H A^H Ax = (Ax)^H (Ax)$$

per cui, ponendo $y = Ax$, si ha

$$x^H Bx = y^H y \geq 0\,.$$

La matrice $B$ è quindi semidefinita positiva. Se la matrice $A$ ha rango massimo, il vettore $y$ non può essere nullo per cui $x^H Bx > 0$ e la matrice $B$ è definita positiva. □

### 2.11.3 Matrici riducibili

Riportiamo due esempi ad illustrazione del Teorema 2.6.1.

**Esempio 2.11.3** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è riducibile infatti il suo grafo orientato non è fortemente connesso, non essendo il punto $N_2$ raggiungibile dagli altri due punti (Fig. 2.2).

Mediante la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene

$$B = P^T AP = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

□

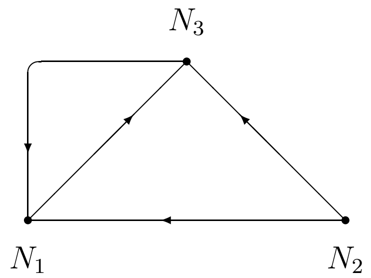


Figura 2.2: Grafo non fortemente connesso.

**Esempio 2.11.4** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è irriducibile in quanto il suo grafo orientato è fortemente connesso, come mostrato in Fig. 2.3. □

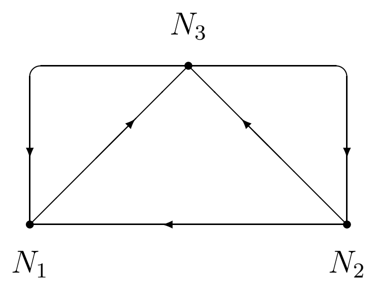


Figura 2.3: Grafo fortemente connesso.

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice riducibile e sia $P$ la matrice di permutazione che la riduce. Poniamo

$$B = P^T AP = \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix},$$

con i blocchi diagonali $B_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, k$, quadrati ed irriducibili; supponiamo che l'ordine dei blocchi $B_{ii}$ sia $p_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, per cui $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$.

La matrice $A$ sia la matrice dei coefficienti di un sistema lineare $Ax = b$. Premoltiplicando per la matrice $P^T$ si ha $P^T Ax = P^T b$ e $P^T APP^T x = P^T b$. Indicando con $y$ il vettore $P^T x$ e con $c$ il vettore $P^T b$, il sistema $Ax = b$ si trasforma nel sistema

$$By = c. \tag{2.15}$$

Partizionando i vettori $y$ e $c$ in blocchi di pari dimensione dei $B_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, k$, il sistema (2.15), scritto in forma esplicita, diviene

$$\begin{array}{lllllllll} B_{11}y_1 & & & & & & & = & c_1 \\ B_{21}y_1 & + & B_{22}y_2 & & & & & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ B_{k1}y_1 & + & B_{k2}y_2 & + & \cdots & + & B_{kk}y_k & = & c_k\,. \end{array} \tag{2.16}$$

La prima equazione è un sistema lineare, con matrice dei coefficienti $B_{11}$, di ordine $p_1$, la cui incognita è il vettore $y_1$; si risolve tale sistema e si sostituisce il vettore $y_1$ nelle equazioni seguenti. La seconda equazione diviene un sistema lineare, quadrato di ordine $p_2$, da cui si ricava il vettore $y_2$ che può essere sostituito nelle equazioni seguenti. Procedendo in questo modo si ricavano tutti i blocchi $y_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, che costituiscono il vettore $y$. Una volta ottenuto l'intero vettore $y$ si risale al vettore $x$ tramite la relazione $x = Py$.

Si osservi che se la matrice $A$ è non singolare tale è anche la matrice $B$ in quanto ottenuta da $A$ con una trasformazione per similitudine. La matrice $B$ ha il determinante uguale al prodotto dei determinanti dei blocchi diagonali per cui se $B$ è non singolare tali sono i blocchi $B_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Questo assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione di tutti i sistemi lineari che via via si risolvono nella (2.16).

La sostituzione del sistema lineare $Ax = b$ con il sistema lineare (2.15) conduce alla risoluzione di $k$ sistemi lineari tutti di ordine inferiore ad $n$ al posto di un unico sistema lineare di ordine $n$. Il vantaggio dell'uso di questa trasformazione risulterà evidente nel Capitolo 3 quando saranno esposti i metodi numerici per la risoluzione dei sistemi lineari.

Si noti che le matrici $A$ e $B$ sono simili e quindi hanno gli stessi autovalori. Per il calcolo degli autovalori di $B$ si può utilizzare la seguente osservazione.

**Osservazione 2.11.1** Gli autovalori di una matrice triangolare o diagonale a blocchi, con blocchi diagonali quadrati, sono tutti e soli gli autovalori dei blocchi diagonali.

Il seguente esempio mostra come si può costruire la matrice di permutazione $P$ che porta in forma ridotta una data matrice $A$ riducibile.

**Esempio 2.11.5** Si consideri la matrice riducibile

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Per trovare la matrice di permutazione che trasforma $A$ nella sua forma ridotta, si costruisce il grafo orientato associato alla matrice $A$, avente i nodi $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$.

Da tale grafo si constata la seguente situazione

| Nodo di partenza | Nodi raggiungibili | Nodi non raggiungibili |
|---|---|---|
| $N_1$ | $N_1, N_3$ | $N_2, N_4, N_5$; |
| $N_2$ | tutti | $- - - -$; |
| $N_3$ | $N_1, N_3$ | $N_2, N_4, N_5$; |
| $N_4$ | tutti | $- - - -$; |
| $N_5$ | $N_1, N_3, N_5$ | $N_2, N_4$. |

Essendo $N_1$ il primo nodo a partire dal quale non è possibile raggiungere tutti gli altri nodi, si riordinano i nodi ponendo ai primi posti quei nodi che sono raggiungibili partendo da $N_1$ e di seguito gli altri. Si ha quindi un nuovo ordinamento dei nodi che è $Q_1 = N_1, Q_2 = N_3, Q_3 = N_2, Q_4 = N_4, Q_5 = N_5$. A questo punto si opera sulla matrice $A$ una trasformazione per similitudine mediante la matrice di permutazione

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuta effettuando sulle colonne della matrice identica la stessa permutazione operata sui nodi $N_i$ per ottenere i nodi $Q_i$.

Si ottiene la matrice

$$A_1 = P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A_1$ è triangolare a blocchi con blocchi diagonali

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il secondo blocco diagonale risulta ancora riducibile in quanto nel suo grafo orientato esiste un nodo (quello di indice massimo) da cui non si possono raggiungere gli altri due.

Su questo blocco si opera analogamente a quanto fatto su $A$; ciò equivale ad effettuare una nuova trasformazione per similitudine sulla matrice $A_1$ mediante la matrice di permutazione

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo la matrice

$$A_2 = P_2^T A_1 P_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

I blocchi diagonali della matrice $A_2$ risultano irriducibili per cui essa è la forma ridotta di $A$.

Alla matrice $A_2$ si può giungere con un'unica trasformazione per similitudine mediante la matrice di permutazione

$$P = P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

### 2.11.4 Autovalori e autovettori di matrici particolari

**Esempio 2.11.6** Le matrici della forma

$$G = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& c &&&& -s &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& s &&&& c &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array},$$

dove $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $c^2 + s^2 = 1$, si dicono *matrici di rotazione*.

Si vogliono calcolare gli autovalori e gli autovettori di $G$ nel caso $s \neq 0$.

Essendo $G$ ortogonale, si ha $\det(GG^T) = 1$, per cui risulta anche $\det(G) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \pm 1$.

Dal Teorema 2.10.3 si ottiene $|\ \lambda_i\ | \leq \|G\|_2 = \sqrt{\rho(GG^T)} = 1$; ne segue che può essere solo $|\ \lambda_i\ | = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

L'equazione caratteristica della matrice $G$ è

$$(1-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - 2c\lambda + 1) = 0\,;$$

pertanto gli autovalori di $G$ sono

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-2} = 1, \quad \lambda_{n-1} = c - \sqrt{-s^2}, \quad \lambda_n = c + \sqrt{-s^2}\,.$$

Poiché in corrispondenza all'autovalore 1 risulta $r(G - I) = 2$, si ha $\alpha(1) = \gamma(1) = n - 2$; quindi la matrice $G$ ammette $n$ autovettori linearmente indipendenti che si ricavano risolvendo i sistemi $(G - \lambda_i I)x = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Con semplici calcoli si ottiene la matrice degli autovettori

$$X = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{-s^2}}{s} &&&& \frac{1}{\sqrt{2}} &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& \frac{1}{\sqrt{2}} &&&& \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{-s^2}}{s} &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \\
\end{array} .$$

Si noti che, essendo $G$ normale, $X$ è unitaria (cfr. Teorema 2.7.8). □

**Esempio 2.11.7** Si consideri la matrice $H = I - 2vv^H$ con $v \in \mathbb{C}^n$ e $v^H v = 1$; la matrice $H$ è detta *matrice di Householder*.

Si vogliono calcolare gli autovalori e gli autovettori di $H$.

A tale scopo, si opera su $H$ una traslazione di spettro e si calcolano gli autovalori della matrice $B = H - I = -2vv^H$. L'equazione caratteristica di $B$, tenuto conto che $v^H v = 1$, è

$$\mu^n + 2\mu^{n-1} = 0\,.$$

Si ricavano quindi gli autovalori di $B$ che sono

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -2, \quad \text{con} \quad \alpha(\mu_1) = n - 1, \quad \alpha(\mu_2) = 1\,.$$

Gli autovalori di $H$ sono quindi

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \text{con} \quad \alpha(\lambda_1) = n - 1, \quad \alpha(\lambda_2) = 1\,.$$

Si verifica facilmente che $\gamma(\lambda_1) = \alpha(\lambda_1)$ e $\gamma(\lambda_2) = \alpha(\lambda_2)$, quindi gli autovettori linearmente indipendenti di $H$ sono $n$. Gli autovettori associati a $\lambda_1$ sono

$$x_1 = \begin{pmatrix} \overline{v}_2 \\ -\overline{v}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} \overline{v}_3 \\ 0 \\ -\overline{v}_1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, x_{n-1} = \begin{pmatrix} \overline{v}_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -\overline{v}_1 \end{pmatrix},$$

mentre l'autovettore associato a $\lambda_2$ è $x_n = v$.

Si osservi, infine, che la matrice $H$ è una matrice hermitiana e unitaria.

□

**Esempio 2.11.8** Si consideri la matrice $J \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ i cui elementi sono

$$(J)_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + k = 2n + 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Essendo $J^2 = I$, indicato con $\lambda$ un autovalore di $J$, si ha $\lambda^2 = 1$; per cui gli autovalori di $J$ possono assumere i valori 1 o $-1$.

Osservando che $tr(J) = 0$ (cfr. (2.6)) si ricavano gli autovalori

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{con} \quad \alpha(\lambda_1) = \alpha(\lambda_2) = n.$$

I due autovalori hanno molteplicità geometrica $\gamma(\lambda_1) = \gamma(\lambda_2) = n$. Gli autovettori associati a $\lambda_1$ sono

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre gli autovettori associati a $\lambda_2$ sono

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, x_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che gli autovettori di $J$ sono anche autovettori di $J^2$ mentre non è vero, in generale, il viceversa. Infatti, la matrice $J^2$ ammette come autovettore un qualunque vettore di $\mathbb{C}^n$. □

### 2.11.5 Matrici tridiagonali

Particolare interesse hanno le *matrici tridiagonali* cioè le matrici $T$ i cui elementi $t_{ij}$ sono nulli se $| \, i - j \, | > 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Pertanto possono scriversi nella seguente forma generale

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 & & \\ b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_n \\ & & b_n & a_n \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Per le matrici tridiagonali (2.17) il calcolo del determinante può effettuarsi mediante la relazione ricorrente

$$\begin{aligned} &D_0 = 1, \\ &D_1 = a_1, \\ &D_i = a_i D_{i-1} - b_i c_i D_{i-2}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \end{aligned}$$

il cui termine $D_n$ è $\det(T)$.

In modo del tutto analogo si può calcolare $\det(T - \lambda I)$, cioè il polinomio caratteristico della matrice (2.17), mediante la successione di polinomi

$$
\begin{aligned}
&P_0(\lambda) = 1,\\
&P_1(\lambda) = a_1 - \lambda,\\
&P_i(\lambda) = (a_i - \lambda)P_{i-1}(\lambda) - b_i c_i P_{i-2}(\lambda), \qquad i = 2, 3, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

dove risulta $P_n(\lambda) = \det(T - \lambda I)$.

**Esempio 2.11.9** Si calcola il determinante della matrice di ordine $n$

$$
T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix},
$$

caso particolare della (2.17).

Per $\det(T_n) = D_n$ risulta

$$
D_n = D_{n-1} + D_{n-2}\,. \tag{2.18}
$$

La (2.18), per $n = 2, 3, \ldots$, è una equazione lineare alle differenze (cfr. 8.3.1) la cui equazione caratteristica è $\mu^2 - \mu - 1 = 0$. La soluzione generale è $D_n = c_1\mu_1^n + c_2\mu_2^n$, con $\mu_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\mu_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Le costanti arbitrarie $c_1$ e $c_2$ possono essere determinate imponendo che per $n = 0$ ed $n = 1$, $D_n$ assuma i valori dati per $D_0$ e $D_1$. Ponendo $D_0 = D_1 = 1$ e risolvendo quindi il sistema

$$
\begin{array}{ccccc}
c_1 & + & c_2 & = & 1 \\
c_1\mu_1 & + & c_2\mu_2 & = & 1\,,
\end{array}
$$

si ricava $c_1 = \mu_1/\sqrt{5}$ e $c_2 = -\mu_2/\sqrt{5}$, da cui

$$
D_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\mu_1^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mu_2^{n+1}\,.
$$

Quindi, ad esempio,

$$
\det(T_{100}) \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}(1.618)^{101} \simeq 5.73 \times 10^{20}\,.
$$

La successione $\{D_n\}$ è nota con il nome di *successione di Fibonacci.* $\square$

### 2.11.6 Conseguenze dei teoremi di Gershgorin

I teoremi di Gershgorin consentono di dedurre alcune proprietà notevoli.

**Corollario 2.11.1** *Una matrice $A$ a predominanza diagonale forte è non singolare.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal primo teorema di Gershgorin tenendo presente che ogni cerchio di Gershgorin ha il centro a distanza $| a_{ii} |$ dall'origine degli assi ed il raggio $\rho_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} | a_{ij} |$; dall'ipotesi segue che nessuno dei detti cerchi contiene l'origine. Lo zero non è quindi autovalore della matrice ed il determinante, per la (2.7), non può essere nullo. $\square$

**Corollario 2.11.2** *Una matrice $A$ a predominanza diagonale debole ed irriducibile è non singolare.*

DIMOSTRAZIONE. Ragionando come nel precedente corollario, si osserva che la predominanza diagonale debole consente ai cerchi di Gershgorin di avere la circonferenza passante per l'origine, eccettuato uno almeno di tali cerchi. D'altra parte se lo zero fosse autovalore della matrice irriducibile $A$, per il terzo teorema di Gershgorin esso dovrebbe appartenere alla frontiera di tutti i cerchi, contrariamente a quanto osservato. Dunque lo zero non è autovalore e perciò $\det(A) \neq 0$. $\square$

**Esempio 2.11.10** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ i & 2i & 1 \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad i^2 = -1;$$

gli autovalori appartengono all'insieme rappresentato in Fig. 2.4 che è l'unione dei tre insiemi

$$\mathcal{F}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid | z - 2 | \leq 2\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid | z - 2i | \leq 2\},$$
$$\mathcal{F}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid | z + 2i | \leq 1\}.$$

La matrice $A$ è a predominanza diagonale debole ed irriducibile; i suoi autovalori sono non nulli essendo $\det(A) = 2$. $\square$

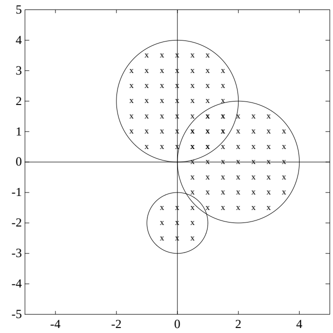

Figura 2.4: cerchi di Gershgorin.

Una interessante applicazione del Teorema 2.8.1 è la possibilità di localizzare le radici reali e complesse di una equazione algebrica.

Sia data l'equazione

$$x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2.19}$$

con $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Si consideri la matrice quadrata di ordine $k$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix}; \tag{2.20}$$

si verifica che la (2.19) è l'equazione caratteristica della matrice $F$: pertanto i suoi autovalori sono le radici dell'equazione assegnata. Quindi è possibile localizzare le radici dell'equazione (2.19) facendo uso del Teorema 2.8.1.

La matrice (2.20) è detta *matrice di Frobenius* o *matrice compagna* dell'equazione (2.19).

**Esempio 2.11.11** Si consideri l'equazione algebrica

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Le radici dell'equazione sono gli autovalori della matrice compagna

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Applicando il primo teorema di Gershgorin alla matrice $F$, le radici dell'equazione appartengono all'insieme $\mathcal{F}$ unione dei cerchi

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid\, |\, z \,| \leq 1\}\,, \quad \mathcal{F}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid\, |\, z - 5 \,| \leq 4\}\,.$$

Se si considera la matrice $F^T$ e si applica ad essa il teorema di Gershgorin (ciò equivale ad operare sulle colonne di $F$) si ottiene l'insieme $\mathcal{G}$ unione dei cerchi

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid\, |\, z \,| \leq 1\}\,, \\ \mathcal{G}_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid\, |\, z \,| \leq 4\}\,, \\ \mathcal{G}_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid\, |\, z - 5 \,| \leq 1\}\,. \end{aligned}$$

Ricordando che gli autovalori delle matrici $F$ e $F^T$ sono gli stessi, si deduce che gli autovalori, quindi le radici dell'equazione proposta, appartengono all'insieme $\mathcal{F} \bigcap \mathcal{G}$, che è più ristretto sia di $\mathcal{F}$ che di $\mathcal{G}$, come mostra la Fig. 2.5. □

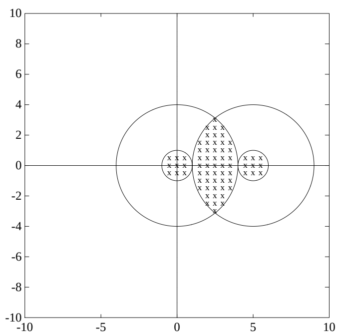


Figura 2.5: Intersezione $\mathcal{F} \bigcap \mathcal{G}$.

### 2.11.7 Polinomio minimo

**Teorema 2.11.3** (di Cayley-Hamilton) *Una matrice $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ verifica la sua equazione caratteristica; si ha cioè*

$$P(A) = \mathbf{O}$$

*essendo il secondo membro la matrice nulla e $P(\lambda)$ il polinomio caratteristico di $A$.*

Si enuncia brevemente il Teorema 2.11.3 dicendo che $A$ annulla $P(\lambda)$; è evidente come la matrice $A$ annulli qualunque polinomio di cui $P(\lambda)$ è divisore; inoltre $A$ può annullare anche polinomi di grado inferiore a $n$.

**Definizione 2.11.1** *Data una matrice $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ si dice* polinomio minimo, *e si indicherà con $P_M(\lambda)$, il polinomio di grado più basso per il quale si ha*

$$P_M(A) = \mathbf{O}.$$

Si può dimostrare che $P_M(\lambda)$ è un divisore di $P(\lambda)$ e che è della forma

$$P_M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p^{(1)}} (\lambda - \lambda_2)^{p^{(2)}} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{p^{(k)}}$$

dove $p^{(i)}$ è l'ordine massimo dei blocchi di Jordan $J_l^{(i)}$ (cfr. Teorema 2.7.9), mentre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, sono gli autovalori distinti di $A$.

**Esempio 2.11.12** Si calcolano i polinomi minimi di alcune matrici particolari.

1. Sia $G$ una matrice di rotazione di ordine $n$ con $s \neq 0$ (cfr. Esempio 2.11.6). Essa ha equazione caratteristica

   $$(\lambda - 1)^{n-2}(\lambda^2 - 2c\lambda + 1) = 0\,;$$

   si ha $\gamma(1) = n - 2$, quindi i blocchi di Jordan sono tutti di ordine 1 e il polinomio minimo di $G$ risulta

   $$P_M(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2c\lambda + 1)\,.$$

2. Sia $H$ una matrice di Householder (cfr. Esempio 2.11.7). Essendo $H$ unitaria ed hermitiana, si ha $H^2 = I$ per cui $H^2 - I = \mathbf{O}$ ed il polinomio minimo è
$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - 1$$
in quanto per nessun valore $\alpha$ può risultare $H + \alpha I = \mathbf{O}$.

3. Sia $J$ la matrice definita nell'Esempio 2.11.8. Anche per $J$ si ha $J^2 = I$ per cui il suo polinomio minimo, come per tutte le matrici ortogonali e simmetriche, risulta
$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - 1\ .$$

□

La conoscenza di un polinomio che sia annullato da una matrice non singolare può essere sfruttata per il calcolo della matrice inversa come mostrato nel seguente esempio.

**Esempio 2.11.13** Sia $A$ la matrice reale di ordine $n$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Conviene operare una traslazione di spettro (cfr. Teorema 2.7.6) e considerare la matrice $A - (n-1)I$. Per essa l'equazione caratteristica (2.4) è $\mu^n - n\mu^{n-1} = 0$ da cui gli autovalori $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$ e $\mu_n = n$. Gli autovalori di $A$ sono perciò

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = n - 1, \quad \lambda_n = 2n - 1.$$

Poiché $A$ è hermitiana, e quindi normale, per il Teorema 2.7.8, è diagonalizzabile, come è confermato dall'uguaglianza delle molteplicità algebrica e geometrica.

La forma canonica di Jordan della matrice $A$ coincide con la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono gli autovalori di $A$ e quindi i blocchi di Jordan sono tutti di ordine 1. Da quanto affermato sopra, il polinomio minimo della matrice $A$ è il polinomio di secondo grado

$$P_M(\lambda) = (\lambda - (n-1))(\lambda - (2n-1)) = \lambda^2 + (2-3n)\lambda + 2n^2 - 3n + 1.$$

Poiché risulta $P_M(A) = \mathbf{O}$, premoltiplicando entrambi i membri per la matrice inversa $A^{-1}$, si ottiene

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2n^2-3n+1}((3n-2)I - A) \\ &= \frac{1}{2n^2-3n+1} \begin{pmatrix} 2n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 2n-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2n-2 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2n-2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2n-2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Bibliografia:** [2], [5], [13], [15], [31].