CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO[1] PER INGEGNERIA INFORMATICA
GENNAIO 2001
==================================

1) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 3 & \beta & -1 \\ -1 & 3 & \beta \\ \beta & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Verificare che $\beta + 2$ è autovalore di A.

b) Per quali valori reali di β la matrice A risulta convergente?

c) Posto $\beta = 3$, dire se il metodo iterativo di Gauss-Seidel è convergente.

2) Determinare a_0, a_1 e b in modo che la formula di quadratura
$$\int_0^b f(x)dx = a_0 f(0) + a_1(f(b) + f'(b/2)) + E(f)$$
risulti di grado di precisione massimo. Indicare il grado raggiunto.
Si ponga $b = \pi$.
Esistono due valori reali α_1, α_2 tali che la formula integri esattamente la funzione $g(x) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x$?
Esistono due valori reali a_0 e a_1 tali che la formula integri esattamente le funzioni $\sin x$ e $\cos x$?

[1] Gli studenti di questo corso devono risolvere anche i quesiti posti sul retro del foglio

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO
PER INGEGNERIA INFORMATICA
GENNAIO 2001
==================================

1) Si inseriscono 6 palline in tre urne U_1, U_2, U_3. Con X indichiamo la v.a. che indica il numero delle palline contenute nell'urna U_1 e con Y la v.a. che indica il numero delle palline contenute complessivamente nelle urne U_1 e U_2.

a) Qual è la densità di probabilità di X?

b) Qual è la densità di probabilità di Y?

c) Qual è la densità di probabilità della v.a $Y - X$?

d) Le v.a. X e Y sono indipendenti?

e) Le v.a. X e $Y - X$ sono indipendenti?

2) Siano X e Y due variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} K(2y^2 + xy) & 0 \leq x \leq 2\,, \quad 0 \leq y \leq 1\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

a) Determinare K affinché $f(x,y)$ sia una densità.

b) Calcolare $P(X + Y \leq 1)$.

c) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

d) Le due variabili aleatorie sono indipendenti?

e) Calcolare le densità condizionali $f_{X|Y}(x \mid y)$ e $f_{Y|X}(y \mid x)$.

1) Si verifica, per esempio, che $\det(A - (\beta+2)I) = 0$.

Si calcola l'equazione caratteristica di A:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + (27 + 3\beta)\lambda - \beta^3 - 9\beta - 26 = 0 \ .$$

Sapendo che un autovalore è $\lambda_1 = \beta + 2$ gli altri autovalori sono $\lambda_2 = \frac{7-\beta+i\sqrt{3}(\beta+1)}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{7-\beta-i\sqrt{3}(\beta+1)}{2}$.
Si ha $\mid \lambda_1 \mid < 1$ per $-3 < \beta < -1$ mentre gli altri due autovalori hanno modulo maggiore di 1 per ogni valore reale di β. Si conclude che A non è convergente.

Posto $\beta = 3$, la matrice di iterazione di Gauss-Seidel è

$$H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & -8/9 \\ 0 & 8/9 & -17/27 \end{pmatrix}$$

con equazione caratteristica

$$\lambda^3 + \frac{26}{27}\lambda^2 + \lambda = 0 \ .$$

Oltre ad un autovalore nullo, si nota che gli altri due autovalori hanno prodotto 1 per cui la matrice non converge e quindi il metodo di Gauss-Seidel non converge.

2) Si impone che la formula risulti esatta per $f(x) = 1, x$ ottenendo il sistema

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & + & a_1 & = & b \\ & & (1+b)a_1 & = & b^2/2 \end{array}$$

la cui soluzione è $a_0 = \frac{b^2+2b}{2b+2}$, $a_1 = \frac{b^2}{2b+2}$.
Per $f(x) = x^2$ si ottiene l'equazione $\frac{b^3}{2} = \frac{b^3}{3}$ che non può essere verificata.
Si deduce che la formula ha grado di precisione 1 per ogni b reale.
Posto $b = \pi$, applicando la formula ottenuta alla funzione $g(x)$ si ha l'equazione

$$2\alpha_1 = \frac{2\pi - \pi^2}{2\pi + 2}\alpha_2$$

per cui si ha l'esattezza della formula se

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{2\pi - \pi^2}{4\pi + 4} t, t \right) \ .$$

Applicando la formula data alla funzione $\sin x$ si ha l'equazione $2 = 0$ che non ha soluzioni. Non esistono quindi coppie a_0, a_1 che soddisfano la domanda.

1) La v.a. X è bernoulliana con densità $X \sim B(6, 1/3)$ mentre la v.a. Y ha densità $Y \sim B(6, 2/3)$.
Si ha anche $Y - X \sim B(6, 1/3)$ (la probabilità di inserire una pallina nella seconda urna).
Le v.a. X e Y non sono indipendenti poichè $P(X = 4, Y = 3) = 0$ mentre $P(X = 4)P(Y = 3) \neq 0$.
Se X e $Y - X$ non sono indipendenti perché se lo fossero dovrebbe risultare $Y = X + (Y - X) \sim B(12, 1/3)$.

2) Perché $f(x, y)$ sia una densità deve risultare $\int_{R^2} f(x, y)dxdy = 1$. Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_0^2 dx \int_0^1 (2y^2 + xy)dy = \frac{7}{3}$$

si ottiene $K = \frac{3}{7}$.
Da un semplice disegno risulta

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{3}{7}(2y^2 + xy)dy = \frac{5}{56} .$$

Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{7}(2y^2 xy)dy = \frac{1}{14}(4 + 3x) ,$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{3}{7}(2y^2 xy)dx = \frac{6}{7}(2y^2 + y) .$$

Le due variabili non sono indipendenti perché, per esempio, $f(2, 1) = \frac{12}{7}$ mentre $f_X(2)f_Y(1) = \frac{90}{49}$.
Le densità condizionali sono

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2y^2 + xy}{4y^2 + 6y} ,$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{12y^2 + 6xy}{4 + 3x} .$$