SCRITTO DI "CALCOLO NUMERICO"
PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA E DELLE TELECOMUNICAZIONI
GENNAIO 2000 - Corsi Semestrali

====================================

1) Determinare i pesi a_0, a_1, a_2 e il nodo α in modo che la formula di quadratura

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2} f(x)dx = a_0 f(\alpha) + a_1 f(\alpha+1) + a_2 f(\alpha+\frac{3}{2}) + E(f)$$

abbia grado di precisione algebrico massimo. Indicare tale grado di precisione.

2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} I & \mathbf{O} & -J \\ I & 2I & \mathbf{O} \\ I & 2I & I \end{pmatrix} \in I\!R^{3n\times 3n}.$$

Calcolare

a) $\det(A)$;

b) la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ con $b = (1, 1, \ldots, 1)^T$;

c) la matrice A^{-1};

d) la matrice H_{GS} e studiarne la convergenza.

1) Si impone che a formula risulti esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ ottenendo il sistema

$$\begin{array}{lcl} a_0 + a_1 + a_2 & = & 2 \\ a_0\alpha + a_1\alpha + a_2\alpha + a_1 + \frac{3}{2}a_2 & = & 2\alpha + 2 \\ a_0\alpha^2 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha^2 + 2a_1\alpha + 3a_2\alpha + a_1 + \frac{9}{4}a_2 & = & 2\alpha^2 + 4\alpha + \frac{8}{3} \end{array} .$$

Sostituendo la prima relazione nelle seguenti si ottengono le equazioni

$$\begin{array}{lcl} a_1 + \frac{3}{2}a_2 & = & 2 \\ 2a_1\alpha + 3a_2\alpha + a_1 + \frac{9}{4}a_2 & = & 4\alpha + \frac{8}{3} \end{array}$$

da cui $a_1 = 2 - \frac{3}{2}a_2$ e sostituendo $2 - \frac{3}{2}a_2 + \frac{9}{4}a_2 = \frac{8}{3}$.
Si ottiene

$$a_2 = \frac{8}{9}, \quad a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_0 = \frac{4}{9}.$$

Per $f(x) = x^3$ si ha $E(x^3) = \frac{1}{3}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La formula proposta ha quindi grado di precisione 2.

2) La matrice A è fattorizzabile nella forma LR con

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ I & I & \mathbf{O} \\ I & I & I \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} I & \mathbf{O} & -J \\ \mathbf{O} & 2I & J \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & I \end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi $\det(A) = \det(L)\det(R) = 2^n$. Si calcolano le matrici L^{-1} e R^{-1}:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -I & I & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -I & I \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{O} & J \\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}J \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & I \end{pmatrix}.$$

Segue

$$A^{-1} = R^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} I & -J & J \\ -\frac{1}{2}I & \frac{1}{2}(I+J) & -\frac{1}{2}J \\ \mathbf{O} & -I & I \end{pmatrix},$$

da cui la soluzione del sistema lineare è $x = A^{-1}b$ con $x_i = 1$ se $1 \leq i \leq n$ e $x_i = 0$ se $i > n$.

La matrice di iterazione di Gauss-Seidel è

$$H_{GS} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -\frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & J \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & J \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\frac{1}{2}J \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix};$$

essendo $\rho(H_{GS}) = 0$ la matrice è convergente.