Test Telematico di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 16/09/2021

1) Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o sono false:

a) $\|A\,B\| \;\leq\; \rho(A)\,\rho(B)$, $\qquad A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

b) $\|A^{-1}\| \;\leq\; 1/\rho(A)$, $\qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

c) $\|A\| \;\leq\; \rho^2(A)$, $\qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

2) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

è la matrice dei coefficienti di un sistema lineare.
Per quali valori reali di α e β risulta convergente il metodo di Jacobi?

3) È data una matrice $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Conoscendo i valori

$$\det(A - I) = -1, \qquad \det(A - 2I) = -3,$$

$$\det(A + I) = 3, \qquad \det(A) = -1,$$

calcolare il polinomio caratterisctico di A.

4) Si vuole approssimare il valore dell'integrale

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx \;=\; \log 2$$

utilizzando la formula dei trapezi. Indicare quanti sottointervalli sono necessari per avere una approssimazione con un massimo errore assoluto $|E| \leq 10^{-3}$.

Soluzione

1) a) Falso. Basta porre $A = I$ per avere $\|B\| \leq \rho(B)$ che contraddice il Teorema di Hirsh.

b) Falso. Se, per esempio, A è reale e simmetrica ed ha autovalori $1, 2, 3, 4$, si ha $\|A^{-1}\|_2 = 1$ mentre $1/\rho(A) = 1/4$.

c) Falso. Se, per esempio, $\rho(A) = 1/3$, risulta $1/3 \leq \|A\|$ e non può essere vero che risulti $1/9 \geq \|A\|$.

2) Risulta

$$H_J = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di H (basta ricondurla ad una matrice di Frobenius) sono $\lambda = -\sqrt[4]{\alpha\beta^3}$ per cui la condizione cercata $|\alpha\beta^3| < 1$.

3) Basta calcolare il polinomio di interpolazione dedotto dalla tabella di valori

x	1	2	-1	0
$f(x)$	-1	-3	3	-1

che risulta

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1 \, .$$

4) Ponendo $f(x) = (x-1)^{-1}$ risulta $f''(x) = 2(x-1)^{-3}$ per cui $M_2 = \sup_{x\in[2,3]} |f''(x)| = 2$. Imponendo che la maggiorazione dell'errore $\frac{1}{12\,k^2} M_2$ risulti inferiore a $\frac{10^{-3}}{2}$ si ha che il minimo numero k di intervalli con cui applicare la formula dei trapezi è

$$k = 19 \, .$$