Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica   19/09/2019

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 19/09/2019

1) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 69 & 0 & 57 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -44 \\ 57 & 0 & 69 & 0 \\ 0 & -44 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

ha un autovettore dato da $x = (0, -\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)^T$.
Quale è l'autovalore ad esso associato?

2) Dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione

$$e^{-x^2} - x^2 - x = 0$$

indicando un intervallo di separazione per ciascuna di esse.

3) Calcolare il numero di condizionamento $\mu_2(A)$ (norma 2) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} .$$

4) Determinare l'equazione della retta $y = ax + b$ che approssima nel senso dei minimi quadrati la tabella di valori

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	-2	1	2	1

5) Per approssimare l'integrale $I(e^x f) = \int_{-1}^{0} e^x \, f(x) \, dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_1(f) = a_0 f(-1) + a_1 f(0) .$$

Determinare i pesi a_0 e a_1 in modo che si abbia il massimo grado di precisione massimo indicandone il valore.

Soluzione

1) Dal quoziente di Raileigh si ha

$$\frac{x^H Ax}{x^H x} = \frac{56}{1} = 56 \,.$$

2) Con una semplice separazione grafica si ricava che l'equazione data ha 2 soluzioni reali tali che, per esempio,

$$\alpha_1 \in]-1.5, -1[\,, \qquad \alpha_2 \in]0.5, 1[\,.$$

3) La matrice è reale e simmetrica con autovalori

$$\lambda_1 = -1\,, \quad \lambda_2 = 1\,, \quad \lambda_3 = 16\,.$$

Segue

$$\mu_2(A) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{16}{1} = 16\,.$$

4) Si risolve il sistema delle equazioni normali dato da

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ottenendo $(a, b)^T = (2/5, 3/5)^T$. La retta cercata ha quindi equazione

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\,.$$

5) Imponendo che la formula risulti esatta per $f(x) = 1, x$ si ottiene il sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcl} a_0 & + & a_1 & = & 1 - 1/e \\ -a_0 & & & = & 2/e - 1 \end{array}$$

la cui soluzione è

$$a_0 = 1 - \frac{2}{e}\,, \quad a_1 = \frac{1}{e}\,.$$

La formula non risulta esatta per $f(x) = x^2$ per cui il massimo grado di precisione è $m = 1$.