Test Telematico di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 22/07/2021

1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x\,y}$$

2) È dato un sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

Determinare i valori $\alpha \in \mathbb{C}$ per i quali il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta convergente.

3) È data l'equazione

$$\log(2x) + x - 1 \;=\; 0\,.$$

Indicare intervalli di separazione delle soluzioni reali della equazione.
Il metodo iterativo

$$x_i \;=\; 1 - \log(2x_{i-1})\,, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

risulta idoneo per approssimare le soluzioni dell'equazione?

4) Si ha

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx \;=\; \sqrt{3}\,f\left(-\frac{3}{2}\right) + \sqrt{3}\,f\left(\frac{3}{2}\right) + E_1(f)\,.$$

Se l'errore risulta esprimibile come $E_1(f) \;=\; K\; f^{(s)}(\xi)$, determinare i valori di K e s.

Soluzione

1) Seguendo l'algoritmo $r_1 = x - y$, $r_2 = x\,y$, $r_3 = r_1/r_2$ si ha

$$\epsilon_f = \epsilon_{r_3} = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \frac{y}{x-y}\epsilon_x - \frac{x}{x-y}\epsilon_y$$

2) Risulta

$$H_{GS} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di H_{GS} sono

$$\mu_1 = 0 \qquad \mu_{2,3} = \pm\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Segue $\rho(H_{GS}) = \frac{1}{|\alpha|^{3/2}}$ per cui il metodo risulta convergente per tutti i numeri complessi per cui si ha $|\alpha| > 1$.

3) Da una semplice sparazione grafica si deduce che l'equazione proposta ha una sola soluzione reale $\alpha \in]0.5, 1[$.
Il metodo iterativo proposto ha la funzione di iterazione $\phi(x) = 1 - \log(2x)$ con derivata prima $\phi'(x) = -\frac{1}{x}$.
Tale derivata ha modulo maggiore di 1 su tutto l'intervallo di separazione per cui non è assicurata la convergenza del metodo proposto.

4) La formula di quadratura proposta ha grado di precisione $m = 1$ per cui risulta $s = 2$.
Essendo $E_1(x^2) = 2\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3} = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$, si ottiene $K = -\frac{5}{4}\sqrt{3}$.