
Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/07/2017



COGNOME NOME

MATRICOLA...

--	--	--	--	--	--

RISPOSTE

1)

--

2)

--

3)

--

4)

--

5)

--

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/07/2017



- 1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x, y) = xy$$

in un punto $P_0 \in [2, 3] \times [1, 2]$.

Si suppone di commettere un errore algoritmico $|\delta_a| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$ e di introdurre i valori x e y con errori $|\delta_x| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$ e $|\delta_y| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$.

Quale è il massimo errore assoluto $|\delta_f|$?

- 2) La matrice

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è la matrice di iterazione di un metodo iterativo per la approssimazione della soluzione di un sistema lineare.

Tale metodo converge?

- 3) È dato il sistema lineare sovradeterminato $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Indicare i valori reali del parametro α per i quali si ha una unica soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati.

- 4) È data l'equazione

$$\log(x) - \frac{1}{x} = 0$$

che ha una unica soluzione $\alpha \in [1.5, 2]$. Il metodo iterativo

$$x_{n+1} = e^{1/x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

è idoneo per approssimare α ?

- 5) Per approssimare l'integrale $I(f) = \int_0^2 f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_3(f) = \frac{1}{4} (f(0) + 3f(2/3) + 3f(4/3) + f(2)) .$$

Supposto che l'errore commesso sia scrivibile nella forma $E_3(f) = Kf^{(s)}(\theta)$, determinare K e s .

SOLUZIONE

- 1) Risultando $A_x = 2$ e $A_y = 3$, si ha

$$|\delta_f| \leq |\delta_a| + A_x |\delta_x| + A_y |\delta_y| = 3 \times 10^{-2}.$$

- 2) IL metodo non converge poiché la matrice H ha autovalori di modulo maggiore di 1. Infatti l'insieme degli autovalori è $\{3, 3, 3, 7\}$.
- 3) La matrice del sistema lineare sovradeterminato ha rango uguale a due per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati qualunque si il valore reale del parametro α .
- 4) La funzione di iterazione del metodo proposto è $\phi(x) = e^{1/x}$.
Si ha $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$ che sull'intervallo $[1.5, 2]$ ha modulo minore di $\frac{4e^{2/3}}{9} < 1$.
Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di convergenza locale ed il metodo può risultare convergente se si sceglie un “buon” punto di partenza.
- 5) La formula risulta esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ma non per $f(x) = x^4$ per cui si ha $s = 4$.
Sapendo che $E_3(x^4) = -\frac{16}{135}$ si ottiene $K = -\frac{2}{405}$.