

---

# Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/07/2017

---



COGNOME ..... NOME .....

MATRICOLA... 

--	--	--	--	--	--

## RISPOSTE

1)

--

2)

--

3)

--

4)

--

5)

--

**N.B.** Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

---

# Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/07/2017

---



- 1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x, y) = xy$$

in un punto  $P_0 \in [2, 3] \times [1, 2]$ .

Si suppone di commettere un errore algoritmico  $|\delta_a| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$  e di introdurre i valori  $x$  e  $y$  con errori  $|\delta_x| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$  e  $|\delta_y| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$ .

Quale è il massimo errore assoluto  $|\delta_f|$ ?

- 2) La matrice

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è la matrice di iterazione di un metodo iterativo per la approssimazione della soluzione di un sistema lineare.

Tale metodo converge?

- 3) È dato il sistema lineare sovradeterminato  $Ax = b$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Indicare i valori reali del parametro  $\alpha$  per i quali si ha una unica soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati.

- 4) È data l'equazione

$$\log(x) - \frac{1}{x} = 0$$

che ha una unica soluzione  $\alpha \in [1.5, 2]$ . Il metodo iterativo

$$x_{n+1} = e^{1/x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

è idoneo per approssimare  $\alpha$ ?

- 5) Per approssimare l'integrale  $I(f) = \int_0^2 f(x)dx$  si utilizza la formula di quadratura

$$J_3(f) = \frac{1}{4} (f(0) + 3f(2/3) + 3f(4/3) + f(2)).$$

Supposto che l'errore commesso sia scrivibile nella forma  $E_3(f) = Kf^{(s)}(\theta)$ , determinare  $K$  e  $s$ .

# SOLUZIONE

- 1) Risultando  $A_x = 2$  e  $A_y = 3$ , si ha

$$|\delta_f| \leq |\delta_a| + A_x |\delta_x| + A_y |\delta_y| = 3 \times 10^{-2}.$$

- 2) IL metodo non converge poiché la matrice  $H$  ha autovalori di modulo maggiore di 1. Infatti l'insieme degli autovalori è  $\{3, 3, 3, 7\}$ .
- 3) La matrice del sistema lineare sovradeterminato ha rango uguale a due per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati qualunque sia il valore reale del parametro  $\alpha$ .
- 4) La funzione di iterazione del metodo proposto è  $\phi(x) = e^{1/x}$ .  
Si ha  $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$  che sull'intervallo  $[1.5, 2]$  ha modulo minore di  $\frac{4e^{2/3}}{9} < 1$ .  
Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di convergenza locale ed il metodo può risultare convergente se si sceglie un “buon” punto di partenza.
- 5) La formula risulta esatta per  $f(x) = 1, x, x^2, x^3$  ma non per  $f(x) = x^4$  per cui si ha  $s = 4$ .  
Sapendo che  $E_3(x^4) = -\frac{16}{135}$  si ottiene  $K = -\frac{2}{405}$ .