Test Telematico di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 1/07/2021

1) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

2) Indicare intervalli di separazione per le soluzioni reali dell'equazione

$$e^x + x^2 - 3x - 3 \; = \; 0 \, .$$

Determinare valori iniziali che rendono convergente il metodo di Newton per la approssimazione delle soluzioni.

3) È dato il sistema lineare sovradeterminato $Ax = b$ con matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, .$$

Indicare i valori reali di α per i quali il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati.

4) Si vuole approssimare il valore dell'integrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ utilizzando la formula

$$J_1(f) \; = \; a_0 \, f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{6}{7} \, f(x_1) \, .$$

Determinare il peso a_0, ed il nodo x_1 in modo da ottenere la formula con massimo grado di precisione. Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Risultano

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) L'equazione data ha due soluzioni reali

$$\alpha_1 \in]-1, -0.5[\qquad \alpha_2 \in]1.5, 2[\,.$$

Dallo studio del segno delle funzioni $f'(x)$ e $f''(x)$ si deduce che per applicare il metodo di Newton con successo si possono scegliere i valori iniziali

$$x_0^{(1)} = -1 \qquad x_0^{(2)} = 2\,.$$

3) Per avere una unica soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati, la matrice A deve risultare di rango 2.
Basta quindi che risultino diversi da zero i minori

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 2 \qquad \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\,.$$

Si ha quindi l'unicità della soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) Imponendo la formula esatta per $f(x) = 1, x$ si ottiene

$$a_0 = \frac{8}{7} \qquad x_1 = \frac{2}{3}\,.$$

La formula ottenuta risulta esatta per $f(x) = x^2$ ma non per $f(x) = x^3$ per cui il grado di precisione è $m = 2$.