Test Telematico di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 10/06/2021

1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

2) Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali risulta convergente la matrice

$$A = \frac{1}{2} I + \alpha B .$$

3) Calcolare i punti fissi della funzione

$$\phi(x) = \frac{x^3 - 6}{2x - 5} .$$

4) È data la tabella di valori

x	0	α	-2	2
$f(x)$	-1	1	1	5α

, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calcolare i valori reali di α per i quali il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo.

Soluzione

1) Seguendo l'algoritmo $r_1 = x + y$, $r_2 = x - y$, $r_3 = r_1/r_2$ si ha

$$\epsilon_f = \epsilon_{r_3} = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \frac{2xy}{x^2 - y^2}\epsilon_x + \frac{2xy}{x^2 - y^2}\epsilon_y$$

2) La matrice B ha autovalori $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ e $\mu_3 = 2$. Segue che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \alpha$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2} + 2\alpha$.
Affinché la matrice A sia convergente deve risultare

$$\left|\frac{1}{2} + \alpha\right| < 1 \qquad \left|\frac{1}{2} + 2\alpha\right| < 1 \,.$$

Tali condizioni sono verificate se

$$-\frac{3}{4} \;<\; \alpha \;<\; \frac{1}{4} \,.$$

3) I punti fissi sono le soluzioni dell'equazione $x = \phi(x)$ che risulta

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 6 \;=\; 0 \,.$$

Da una separazione grafica si deduce che si ha un solo punto fisso appartenente, per esempio, all'intervallo $]1.4328, 1.4329[$.

4) Si imposta il quadro delle differenze divise ottenendo

x	$f(x)$	$DD1$	$DD2$
0	-1		
-2	1	-1	
2	5α	$\frac{5\alpha+1}{2}$	$\frac{5\alpha+3}{8}$
α	1	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$

L'ultima colonna risulta costante se α è soluzione dell'equazione

$$5\alpha^2 + 3\alpha - 8 \;=\; 0 \,.$$

Si ha quindi che il grado del polinomio risulta minimo (grado 2) se

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = -\frac{8}{5} \,.$$