Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 11/06/2018

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 11/06/2018

1) Calcolare la cardinalità dell'insieme dei numeri di macchina $F(7, 2, -3, 3)$.

2) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 3\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 5\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ .$$

a) Determinare l'insieme dei valori reali e positivi del parametro α per i quali i cerhi di Gershgorin sono due a due disgiunti.

b) Per tali valori di α la matrice A risulta diagonalizzabile?

3) Calcolare i punti fissi della funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{2x} & \text{se} \quad x^2 - 2 \geq 0 \\ 1 + x - \frac{1}{2}x^2 & \text{se} \quad x^2 - 2 < 0 \end{cases} .$$

4) È data la funzione $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$.
Calcolare il polinomio $P_2(x)$ di interpolazione relativo ai punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_1(f) = a_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} f(x_0).$$

Determinare il peso a_0 e il nodo x_0 in modo da ottenere il massimo grado di precisione algebrico.
Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) La cardinalità richiesta è data da $2(\beta-1)\beta^{m-1}(U-L+1)+1$ dove β è la base della rappresentazione, m è il numero delle cifre rappresentate nella mantissa, L e U sono, rispettivamente, il minimo ed il massimo esponente da dare alla base nella rappresentazione del numero. Nel caso considerato si ha $\beta = 7$, $m = 2$, $L = -3$ e $U = 3$ per cui la cardinalità risulta uguale a 589.

2) Affinché i tre cerchi di Gerhgorin siano due a due disgiunti deve risultare $\alpha > 3/2$.
Per tali valori la matrice è diagonalizzabile avendo tre autovalori due a due distinti.

3) I punti fissi sono le soluzioni dell'equazione $x = \phi(x)$. Risolvendo tale equazione si determinano due punti fissi $\alpha_1 = \sqrt{2}$ e $\alpha_2 = -\sqrt{2}$

4) Il polinomio cercato è $P_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2 + 3x)$.

5) Imponendo che la formula risulti esatta per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ si ha $a_0 = 1/2$ e $x_0 = 1/6$.
La formula così ottenuta non è esatta per $f(x) = x^2$ per cui il grado di precisione è $m = 1$.