Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 9/06/2022

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA... | | | | | | |

Risposte

1)

2)

3)

4)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 9/06/2022

1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione
$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}\,.$$

2) La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è la matrice dei coefficienti del sistema lineare $Ax = b$.
Il metodo iterativo di Jacobi risulta convergente?

3) È data l'equazione
$$e^x + 2x \;=\; 0\,.$$
Determinare intervalli di separazione delle soluzioni reali.
Lo schema iterativo
$$x_{n+1} \;=\; \log(-2x_n)\,,\; n = 0, 1, 2, \ldots$$
risulta adatto per approssimare le soluzioni della equazione?

4) Determinare i nodi della formula di quadratura
$$J_1(f) \;=\; \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{3}{2} f(x_1)$$
in modo che risulti di massimo grado di precisione per la approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.
Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Seguendo l'algoritmo $r_1 = x + y$, $r_2 = x - y$ e $r_3 = r_1/r_2$ si ha

$$\epsilon_f = \epsilon_{r_3} = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \frac{2xy}{x^2 - y^2}\epsilon_x + \frac{2xy}{x^2 - y^2}\epsilon_y$$

2) La matrice di iterazione di Jacobi è

$$H_J = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

L'equazione caratteristica è $2\lambda^3 - \lambda + 1 = 0$ per cui, avendo un autovalore uguale a -1, il metodo non risulta convergente.

3) Da una semplice separazione grafica si deduce che l'equazione proposta ha una sola radice reale appartenente all'intervallo $]-1, 0[$. Il metodo proposto ha la funzione di iterazione $\phi(x) = \log(-2x)$. Si ha $\phi'(x) = \frac{1}{x}$ che risulta di modulo maggiore di 1 su tutto l'intervallo di separazione. Segue che il metodo non risulta adatto ad approssimare la soluzione dell'equazione.

4) La formula risulta esatta per $f(x) = 1$. si impone che la formula risulti esatta per $f(x) = x, x^2$ ottenendo il sistema non lineare

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}x_0 & + & \frac{3}{2}x_1 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_0^2 & + & \frac{3}{2}x_1^2 & = & \frac{2}{3} \end{array} .$$

Il sistema ha due soluzioni

$$(x_0, x_1) = (1, -1/3) \qquad (x_0, x_1) = (-1, 1/3) .$$

In entrambi i casi le formule non risultano esatte per $f(x) = x^3$ per cui hanno grado di precisione $m = 2$.