Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 15/01/2018

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 15/01/2018

1) Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{x-y} \, .$$

2) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

3) Determinare intervalli di separazione dei punti fissi della funzione

$$\phi(x) = e^x - x - 2 \, .$$

4) È data la funzione $f(x) = x^2 - x + 3$.
Calcolare il polinomio $P_1(x)$ di interpolazione relativo ai due punti $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$.
Determinare l'espressione di $E_1(x) = f(x) - P_1(x)$ stabilendone anche il massimo valore assoluto sull'intervallo $[-1, 1]$.

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_1(f) = a_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + a_1 f\left(\frac{2}{3}\right) .$$

Determinare i pesi a_0 e a_1 in modo da ottenere il massimo grado di precisione algebrico.
Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Considerando l'algoritmo

$$r_1 = x - y \,, \quad r_2 = \frac{x}{r_1} \,,$$

si ottiene l'espressione dell'errore relativo

$$\epsilon_f = \epsilon_2 - \epsilon_1 + \frac{y}{x-y} \left(\epsilon_y - \epsilon_x \right) \,.$$

2) Risulta

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad R = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \,.$$

3) Si devono separare le soluzioni dell'equazione $x = e^x - x - 2$. Si evidenziano due soluzioni α_1, α_2 con

$$\alpha_1 \in]-1, -1/2[\,, \qquad \alpha_2 \in]3/2, 2[\,.$$

4) Il polinomio cercato è $P_1(x) = -x + 4$. L'errore commesso è $E(x) = f(x) - P_1(x) = x^2 - 1$. Sull'intervallo dato, il massimo errore in valore assoluto si ha per $x = 0$ e quindi risulta $\max_{x \in [-1,1]} |E(x)| = |E(0)| = 1$.

5) Imponendo che la formula risulti esatta per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ si ottengono i pesi $a_0 = 8/7$ e $a_1 = 6/7$.
La formula così ottenuta risulta esatta anche per $f(x) = x^2$ ma non per $f(x) = x^3$ per cui il grado di precisione è $m = 2$.